

■ Objectif :

- Approfondir sur le thème des applications linéaires.

■ Les exercices

1 6 points – Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et f l'application qui à un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ associe le polynôme $f(P) = X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$

a) Montrer que f est une symétrie.

b) Trouver une base de $F = \text{Inv}f$ et $G = \text{AntiInv}f$.

2 10 points – Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

On suppose que : $u^2 \circ v = u$ et $\text{rg}(u) = \text{rg}(v)$.

1. Montrer que : $\text{Ker } u = \text{Ker } v$ et $\text{Im}(u \circ v - \text{Id}_E) \subset \text{Ker } u$.

2. En déduire : $v \circ u \circ v = v$.

3. Montrer que $u \circ v$ est un projecteur de E puis que $\text{Ker}(u \circ v) = \text{Ker } v$.

4. Montrer que : $\text{Im}(u \circ v) = \text{Im } u$.

5. En déduire que $u \circ v \circ u = u$, puis que : $v^2 \circ u = v$.