

■ Objectif :

- Rédiger deux questions très classiques sur la suite des noyaux « emboîtés »
- Augmenter ses réflexes sur le thème des projecteurs et des symétries

■ Les calculs

- 1** 6 points – Soit E désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.
1. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\text{Ker } u^k \subset \text{Ker } u^{k+1}$.
 2. Montrer que si $\text{Ker } u^p = \text{Ker } u^{p+1}$ pour un certain $p \in \mathbb{N}$, alors pour tout $k \geq p$: $\text{Ker } u^k = \text{Ker } u^p$.
- 2** 4 points – Soit $m \in \mathbb{R}$, fixé. Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on note $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0\}$ et $G_m = \text{Vect}(X - m)$.
1. Trouver les valeurs de m pour lesquelles F et G_m sont supplémentaires.
 2. On suppose F et G_m sont supplémentaires. Soient $P \in \mathbb{R}_2[X]$ et f le projecteur sur G_m et parallèlement à F . Exprimer $f(P)$ en fonction de P .