

Familles sommables

Chapitre 36

L'ordre compte ?

- On sait que :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

Introduction

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9 + \cdots = \ln 2$$

L'ordre compte ?

- On sait que :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{(-1)^{n-1}}{n}}_{u_n} = \ln 2$$

Introduction

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9 + \cdots = \ln 2$$

L'ordre compte ?

- On sait que :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{(-1)^{n-1}}{n}}_{u_n} = \ln 2$$
- Est-il vrai que :
$$(u_1 + u_2 + u_4) + (u_3 + u_6 + u_8) + (u_5 + u_{10} + u_{12}) + \cdots = \ln 2 ?$$

Introduction

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9 + \cdots = \ln 2$$

L'ordre compte ?

- On sait que :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{(-1)^{n-1}}{n}}_{u_n} = \ln 2$$

$$(u_1 + u_2 + u_4) + (u_3 + u_6 + u_8) + (u_5 + u_{10} + u_{12}) + \cdots = \ln 2 ?$$

- Est-il vrai que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{(u_{2k-1} + u_{4k-2} + u_{4k})}_{= \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}} = \ln 2 ?$$

Introduction

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9 + \cdots = \ln 2$$

L'ordre compte ?

- On sait que :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{(-1)^{n-1}}{n}}_{u_n} = \ln 2$$

$$(u_1 + u_2 + u_4) + (u_3 + u_6 + u_8) + (u_5 + u_{10} + u_{12}) + \cdots = \ln 2 ?$$

- Est-il vrai que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{(u_{2k-1} + u_{4k-2} + u_{4k})}_{=\frac{1}{2}(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k})} = \ln 2 ?$$

Introduction

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9 + \cdots = \ln 2$$

L'ordre compte ?

- On sait que :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{(-1)^{n-1}}{n}}_{u_n} = \ln 2$$

$$(u_1 + u_2 + u_4) + (u_3 + u_6 + u_8) + (u_5 + u_{10} + u_{12}) + \cdots = \ln 2 ?$$

- Est-il vrai que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{(u_{2k-1} + u_{4k-2} + u_{4k})}_{=\frac{1}{2}(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

Introduction

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9 + \cdots = \ln 2$$

L'ordre compte ?

- On sait que :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{(-1)^{n-1}}{n}}_{u_n} = \ln 2$$

$$(u_1 + u_2 + u_4) + (u_3 + u_6 + u_8) + (u_5 + u_{10} + u_{12}) + \cdots = \ln 2 ?$$

- Est-il vrai que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{(u_{2k-1} + u_{4k-2} + u_{4k})}_{=\frac{1}{2}(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{\ln 2}{2}$$

Dans tout le chapitre

- I est un ensemble quelconque.

I Famille quelconque d'éléments de $[0, +\infty]$

I Famille quelconque d'éléments de $[0, +\infty]$

II Familles sommables de nombres complexes

III Applications aux sommes doubles

1 Calculs dans $[0, +\infty]$

Prolongement de l'ordre et des opérations à $[0, +\infty]$

- *Ordre* $\leq$. Pour tout $x \in [0, +\infty[$:

1 Calculs dans $[0, +\infty]$

Prolongement de l'ordre et des opérations à $[0, +\infty]$

- *Ordre* $\leq$. Pour tout $x \in [0, +\infty[$: $x < +\infty$

1 Calculs dans $[0, +\infty]$

Prolongement de l'ordre et des opérations à $[0, +\infty]$

- *Ordre* $\leq$. Pour tout $x \in [0, +\infty[$: $x < +\infty$
- *Addition*. Pour $x \in [0, +\infty]$: $x + (+\infty) = (+\infty) + x$

1 Calculs dans $[0, +\infty]$

Prolongement de l'ordre et des opérations à $[0, +\infty]$

- *Ordre* $\leq$. Pour tout $x \in [0, +\infty[$: $x < +\infty$
- *Addition*. Pour $x \in [0, +\infty]$: $x + (+\infty) = (+\infty) + x \underset{\text{déf.}}{=} +\infty$

Prolongement de l'ordre et des opérations à $[0, +\infty]$

- *Ordre* $\leq$. Pour tout $x \in [0, +\infty[$: $x < +\infty$
- *Addition*. Pour $x \in [0, +\infty]$: $x + (+\infty) = (+\infty) + x \underset{\text{déf.}}{=} +\infty$
- *Multiplication*. Pour tout $x \in]0, +\infty]$:

1 Calculs dans $[0, +\infty]$

Prolongement de l'ordre et des opérations à $[0, +\infty]$

- *Ordre* $\leq$. Pour tout $x \in [0, +\infty[$: $x < +\infty$
- *Addition*. Pour $x \in [0, +\infty]$: $x + (+\infty) = (+\infty) + x \underset{\text{déf.}}{=} +\infty$
- *Multiplication*. Pour tout $x \in]0, +\infty]$:

$$x \times (+\infty) = (+\infty) \times x \underset{\text{déf.}}{=} +\infty$$

1 Calculs dans $[0, +\infty]$

Prolongement de l'ordre et des opérations à $[0, +\infty]$

- *Ordre* $\leq$. Pour tout $x \in [0, +\infty[$: $x < +\infty$
- *Addition*. Pour $x \in [0, +\infty]$: $x + (+\infty) = (+\infty) + x \underset{\text{déf.}}{=} +\infty$
- *Multiplication*. Pour tout $x \in]0, +\infty]$:

$$x \times (+\infty) = (+\infty) \times x \underset{\text{déf.}}{=} +\infty \quad \text{et}$$

$$0 \times (+\infty) = (+\infty) \times 0 \underset{\text{déf.}}{=} 0$$

1 Calculs dans $[0, +\infty]$

Prolongement de l'ordre et des opérations à $[0, +\infty]$

- *Ordre* $\leq$. Pour tout $x \in [0, +\infty[$: $x < +\infty$
- *Addition*. Pour $x \in [0, +\infty]$: $x + (+\infty) = (+\infty) + x \underset{\text{déf.}}{=} +\infty$
- *Multiplication*. Pour tout $x \in]0, +\infty]$:

$$x \times (+\infty) = (+\infty) \times x \underset{\text{déf.}}{=} +\infty \quad \text{et}$$

$$0 \times (+\infty) = (+\infty) \times 0 \underset{\text{déf.}}{=} 0$$

1 Calculs dans $[0, +\infty]$

Prolongement de l'ordre et des opérations à $[0, +\infty]$

- *Ordre* $\leq$. Pour tout $x \in [0, +\infty[$: $x < +\infty$
- *Addition*. Pour $x \in [0, +\infty]$: $x + (+\infty) = (+\infty) + x \underset{\text{déf.}}{=} +\infty$
- *Multiplication*. Pour tout $x \in]0, +\infty]$:

$$x \times (+\infty) = (+\infty) \times x \underset{\text{déf.}}{=} +\infty \quad \text{et}$$

$$0 \times (+\infty) = (+\infty) \times 0 \underset{\text{déf.}}{=} 0$$

- *Borne supérieure*. Toute partie de $[0, +\infty]$ possède une borne supérieure

1 Calculs dans $[0, +\infty]$

Prolongement de l'ordre et des opérations à $[0, +\infty]$

- *Ordre* $\leq$. Pour tout $x \in [0, +\infty[$: $x < +\infty$
- *Addition*. Pour $x \in [0, +\infty]$: $x + (+\infty) = (+\infty) + x \underset{\text{déf.}}{=} +\infty$
- *Multiplication*. Pour tout $x \in]0, +\infty]$:

$$x \times (+\infty) = (+\infty) \times x \underset{\text{déf.}}{=} +\infty \quad \text{et}$$

$$0 \times (+\infty) = (+\infty) \times 0 \underset{\text{déf.}}{=} 0$$

- *Borne supérieure*. Toute partie de $[0, +\infty]$ possède une borne supérieure dans $[0, +\infty]$.

2 Somme d'une famille d'éléments de $[0, +\infty]$

Cadre

- $(u_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $[0, +\infty]$
- On note $\mathcal{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I

Définition 1

La *somme* $(u_i)_{i \in I}$ est l'élément de $[0, +\infty]$:

2 Somme d'une famille d'éléments de $[0, +\infty]$

Cadre

- $(u_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $[0, +\infty]$
- On note $\mathcal{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I

Définition 1

La *somme* $(u_i)_{i \in I}$ est l'élément de $[0, +\infty]$: $\sum_{i \in I} u_i \stackrel{\text{déf.}}{=} \sup_{J \in \mathcal{P}_f(I)} \sum_{i \in J} u_i$

2 Somme d'une famille d'éléments de $[0, +\infty]$

Cadre

- $(u_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $[0, +\infty]$
- On note $\mathcal{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I

Définition 1

La *somme* $(u_i)_{i \in I}$ est l'élément de $[0, +\infty]$: $\sum_{i \in I} u_i \stackrel{\text{déf.}}{=} \sup_{J \in \mathcal{P}_f(I)} \sum_{i \in J} u_i$

2 Somme d'une famille d'éléments de $[0, +\infty]$

Cadre

- $(u_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $[0, +\infty]$

- On note $\mathcal{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I . On définit la somme de la famille $(u_i)_{i \in I}$ par :
$$\sum_{i \in I} u_i = \sup A \quad \text{où : } A = \left\{ \sum_{j \in J} u_j ; J \in \mathcal{P}_f(I) \right\}$$

Définition 1

La somme $(u_i)_{i \in I}$ est l'élément de $[0, +\infty]$: $\sum_{i \in I} u_i \stackrel{\text{déf.}}{=} \sup_{J \in \mathcal{P}_f(I)} \sum_{i \in J} u_i$

2 Somme d'une famille d'éléments de $[0, +\infty]$

Cadre

- $(u_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $[0, +\infty]$

- On note $\mathcal{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I . On définit la somme de la famille $(u_i)_{i \in I}$ par :
$$= \sup A \quad \text{où : } A = \left\{ \sum_{j \in J} u_j ; J \in \mathcal{P}_f(I) \right\}$$

Définition 1

La somme $(u_i)_{i \in I}$ est l'élément de $[0, +\infty]$: $\sum_{i \in I} u_i \stackrel{\text{déf.}}{=} \sup_{J \in \mathcal{P}_f(I)} \sum_{i \in J} u_i$

Remarque

Si I est fini, cette notion coïncide avec la notion usuelle de somme.

2 Somme d'une famille d'éléments de $[0, +\infty]$

Cadre

- $(u_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $[0, +\infty]$

- On note $\mathcal{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I :
$$= \sup A \quad \text{où : } A = \left\{ \sum_{j \in J} u_j ; J \in \mathcal{P}_f(I) \right\}$$

Définition 1

La *somme* $(u_i)_{i \in I}$ est l'élément de $[0, +\infty]$: $\sum_{i \in I} u_i \stackrel{\text{déf.}}{=} \sup_{J \in \mathcal{P}_f(I)} \sum_{i \in J} u_i$

Remarque

Si l'un des u_i vaut $+\infty$: $\sum_{i \in I} u_i = +\infty$

2 Somme d'une famille d'éléments de $[0, +\infty]$

Cadre

- $(u_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $[0, +\infty]$

- On note $\mathcal{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I :
$$= \sup A \quad \text{où : } A = \left\{ \sum_{j \in J} u_j ; J \in \mathcal{P}_f(I) \right\}$$

Définition 1

La *somme* $(u_i)_{i \in I}$ est l'élément de $[0, +\infty]$: $\sum_{i \in I} u_i \stackrel{\text{déf.}}{=} \sup_{J \in \mathcal{P}_f(I)} \sum_{i \in J} u_i$

Cas des séries de réels positifs

Pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ positive $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n & \text{si la série CV} \\ +\infty & \text{si la série DV} \end{cases}$

2 Somme d'une famille d'éléments de $[0, +\infty]$

Cadre

- $(u_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $[0, +\infty]$

- On note $\mathcal{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I :
$$= \sup A \quad \text{où : } A = \left\{ \sum_{j \in J} u_j ; J \in \mathcal{P}_f(I) \right\}$$

Définition 1

La *somme* $(u_i)_{i \in I}$ est l'élément de $[0, +\infty]$:
$$\sum_{i \in I} u_i \stackrel{\text{déf.}}{=} \sup_{J \in \mathcal{P}_f(I)} \sum_{i \in J} u_i$$

Cas des séries de réels positifs

Pour toute *suite* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ positive
$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n & \text{si la série CV} \\ +\infty & \text{si la série DV} \end{cases}$$

2 Somme d'une famille d'éléments de $[0, +\infty]$

Cadre

- $(u_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $[0, +\infty]$

- On note $\mathcal{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I . On définit $\sum_{i \in I} u_i = \sup A$ où : $A = \left\{ \sum_{j \in J} u_j ; J \in \mathcal{P}_f(I) \right\}$

Définition 1

La somme $(u_i)_{i \in I}$ est l'élément de $[0, +\infty]$: $\sum_{i \in I} u_i \stackrel{\text{déf.}}{=} \sup_{J \in \mathcal{P}_f(I)} \sum_{i \in J} u_i$

Cas des séries de réels positifs

Pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ positive $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n & \text{si la série CV} \\ +\infty & \text{si la série DV} \end{cases}$

Exercice 1

Démontrer le résultat sur le cas des séries à termes positifs.

3 Règles de calcul

Théorème 1 : Sommation par paquets (admis)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de $[0, +\infty]$.

Soit $(I_k)_{k \in K}$ un recouvrement disjoint de I :

3 Règles de calcul

Théorème 1 : Somme par paquets (admis)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de $\mathbb{R}, +\infty]$.

Soit $(I_k)_{k \in K}$ un recouvrement disjoint de I :

- $\bigcup_{k \in K} I_k = I$
- $I_k \cap I_\ell = \emptyset$ si $k \neq \ell$

3 Règles de calcul

- $\bigcup_{k \in K} I_k = I$

Théorème 1 : Somme par paquets (admis)

- $I_k \cap I_\ell = \emptyset$ si $k \neq \ell$

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de $\mathbb{R}$, $[-\infty, +\infty]$.

Soit $(I_k)_{k \in K}$ un recouvrement disjoint de I :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} u_i$$

3 Règles de calcul

- $\bigcup_{k \in K} I_k = I$

Théorème 1 : Somme par paquets (admis)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de $[0, +\infty]$.

Soit $(I_k)_{k \in K}$ un recouvrement disjoint de I :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} u_i$$

Théorème 2 : Opérations

Soit $(u_i)_{i \in I}, (v_i)_{i \in I}$ des familles de $[0, +\infty]$.

▪ *Linéarité.* ▪

▪

3 Règles de calcul

- $\bigcup_{k \in K} I_k = I$

Théorème 1 : Somme par paquets (admis)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de $[0, +\infty]$.

Soit $(I_k)_{k \in K}$ un recouvrement disjoint de I :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} u_i$$

Théorème 2 : Opérations

Soit $(u_i)_{i \in I}, (v_i)_{i \in I}$ des familles de $[0, +\infty]$.

- *Linéarité.* ▪ $\sum_{i \in I} \lambda u_i = \lambda \sum_{i \in I} u_i$ ▪

3 Règles de calcul

$$\bigcup_{k \in K} I_k = I$$

Théorème 1 : Somme par paquets (admis)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de $[0, +\infty]$.

Soit $(I_k)_{k \in K}$ un recouvrement disjoint de I :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} u_i$$

Théorème 2 : Opérations

Soit $(u_i)_{i \in I}, (v_i)_{i \in I}$ des familles de $[0, +\infty]$.

$$\begin{aligned} \text{■ Linéarité.} \quad & \sum_{i \in I} \lambda u_i = \lambda \sum_{i \in I} u_i \quad \text{■} \quad \sum_{i \in I} u_i + v_i = \sum_{i \in I} u_i + \sum_{i \in I} v_i \end{aligned}$$

3 Règles de calcul

$$\bigcup_{k \in K} I_k = I$$

Théorème 1 : Somme par paquets (admis)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de $[0, +\infty]$.

Soit $(I_k)_{k \in K}$ un recouvrement disjoint de I :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} u_i$$

Théorème 2 : Opérations

Soit $(u_i)_{i \in I}, (v_i)_{i \in I}$ des familles de $[0, +\infty]$.

- *Linéarité.* ▪ $\sum_{i \in I} \lambda u_i = \lambda \sum_{i \in I} u_i$ ▪ $\sum_{i \in I} u_i + v_i = \sum_{i \in I} u_i + \sum_{i \in I} v_i$
- *Croissance.* Si $u_i \leq v_i$ pour tout $i \in I$:

3 Règles de calcul

$$\bigcup_{k \in K} I_k = I$$

Théorème 1 : Somme par paquets (admis)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de $[0, +\infty]$.

Soit $(I_k)_{k \in K}$ un recouvrement disjoint de I :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} u_i$$

Théorème 2 : Opérations

Soit $(u_i)_{i \in I}, (v_i)_{i \in I}$ des familles de $[0, +\infty]$.

▪ *Linéarité.* ▪ $\sum_{i \in I} \lambda u_i = \lambda \sum_{i \in I} u_i$ ▪ $\sum_{i \in I} u_i + v_i = \sum_{i \in I} u_i + \sum_{i \in I} v_i$

▪ *Croissance.* Si $u_i \leq v_i$ pour tout $i \in I$: $\sum_{i \in I} u_i \leq \sum_{i \in I} v_i$

3 Règles de calcul

$$\bigcup_{k \in K} I_k = I$$

Théorème 1 : Somme par paquets (admis)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de $[0, +\infty]$.

Soit $(I_k)_{k \in K}$ un recouvrement disjoint de I :
$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} u_i$$

Théorème 2 : Opérations

Soit $(u_i)_{i \in I}, (v_i)_{i \in I}$ des familles de $[0, +\infty]$.

- *Linéarité.*
$$\sum_{i \in I} \lambda u_i = \lambda \sum_{i \in I} u_i \quad \text{▪} \quad \sum_{i \in I} u_i + v_i = \sum_{i \in I} u_i + \sum_{i \in I} v_i$$
- *Croissance.* Si $u_i \leq v_i$ pour tout $i \in I$:
$$\sum_{i \in I} u_i \leq \sum_{i \in I} v_i$$
- *Invariance par permutation.*

3 Règles de calcul

$$\bigcup_{k \in K} I_k = I$$

Théorème 1 : Somme par paquets (admis)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de $[0, +\infty]$.

Soit $(I_k)_{k \in K}$ un recouvrement disjoint de I :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} u_i$$

Théorème 2 : Opérations

Soit $(u_i)_{i \in I}, (v_i)_{i \in I}$ des familles de $[0, +\infty]$.

- *Linéarité.* ▪ $\sum_{i \in I} \lambda u_i = \lambda \sum_{i \in I} u_i$ ▪ $\sum_{i \in I} u_i + v_i = \sum_{i \in I} u_i + \sum_{i \in I} v_i$
- *Croissance.* Si $u_i \leq v_i$ pour tout $i \in I$: $\sum_{i \in I} u_i \leq \sum_{i \in I} v_i$
- *Invariance par permutation.* $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_{\sigma(i)}$

3 Règles de calcul

$$\bigcup_{k \in K} I_k = I$$

Théorème 1 : Somme par paquets (admis)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de $[0, +\infty]$.

Soit $(I_k)_{k \in K}$ un recouvrement disjoint de I :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} u_i$$

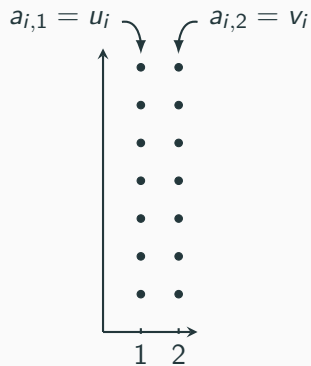
Théorème 2 : Opérations

Soit $(u_i)_{i \in I}, (v_i)_{i \in I}$ des familles de $[0, +\infty]$.

- *Linéarité.* ▪ $\sum_{i \in I} \lambda u_i = \lambda \sum_{i \in I} u_i$ ▪ $\sum_{i \in I} u_i + v_i = \sum_{i \in I} u_i + \sum_{i \in I} v_i$
- *Croissance.* Si $u_i \leq v_i$ pour tout $i \in I$: $\sum_{i \in I} u_i \leq \sum_{i \in I} v_i$
- *Invariance par permutation.* $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_{\sigma(i)}$

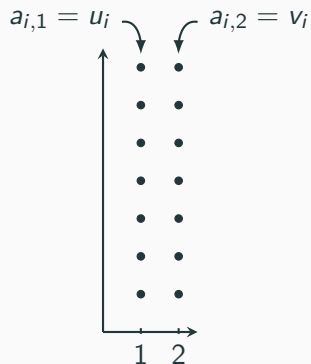
Exercice 2 : Démontrer le théorème 2

3 Règles de calcul

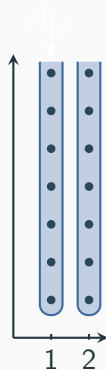


$$\sum_{\substack{i \in I \\ j \in \{1, 2\}}} a_{i,j}$$

3 Règles de calcul



$$\sum_{\substack{i \in I \\ j \in \{1,2\}}} a_{i,j}$$

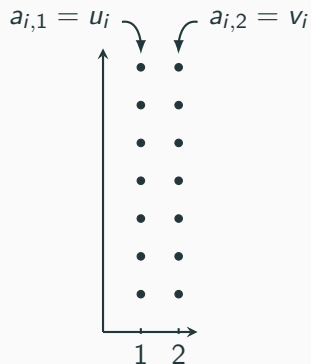


$$\sum_{i \in I} u_i + \sum_{i \in I} v_i$$

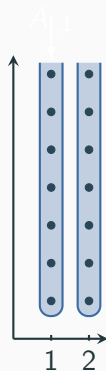
3 Règles de calcul



$$\sum_{i \in I} u_i + v_i$$



$$\sum_{\substack{i \in I \\ j \in \{1,2\}}} a_{i,j}$$



$$\sum_{i \in I} u_i + \sum_{i \in I} v_i$$

3 Règles de calcul

Théorème 1 : Sommation par paquets (admis)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de $[0, +\infty]$.

Soit $(I_k)_{k \in K}$ un recouvrement disjoint de I :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} u_i$$

Théorème 3 : Fubini

Soit $(u_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille de $[0, +\infty]$:

3 Règles de calcul

Théorème 1 : Sommation par paquets (admis)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de $[0, +\infty]$.

Soit $(I_k)_{k \in K}$ un recouvrement disjoint de I :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} u_i$$

Théorème 3 : Fubini

Soit $(u_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille de $[0, +\infty]$:

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{ij} =$$

3 Règles de calcul

Théorème 1 : Sommation par paquets (admis)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de $[0, +\infty]$.

Soit $(I_k)_{k \in K}$ un recouvrement disjoint de I :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} u_i$$

Théorème 3 : Fubini

Soit $(u_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille de $[0, +\infty]$:

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{ij} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_{ij}$$

3 Règles de calcul

Théorème 1 : Sommation par paquets (admis)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de $[0, +\infty]$.

Soit $(I_k)_{k \in K}$ un recouvrement disjoint de I :
$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} u_i$$

Théorème 3 : Fubini

Soit $(u_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille de $[0, +\infty]$:

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{ij} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_{ij} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} u_{ij}$$

3 Règles de calcul

Théorème 1 : Sommation par paquets (admis)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de $[0, +\infty]$.

Soit $(I_k)_{k \in K}$ un recouvrement disjoint de I :
$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} u_i$$

Théorème 3 : Fubini

Soit $(u_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille de $[0, +\infty]$:

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{ij} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_{ij} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} u_{ij}$$

Exercice 3

Démontrer le théorème

3 Règles de calcul

SF 4 : utiliser le théorème de Fubini

Exemple 1 : Calculer les sommes

a)
$$\sum_{p,q \in \mathbb{N}} \frac{p^q}{e^{2p} q!}$$

3 Règles de calcul

SF 4 : utiliser le théorème de Fubini

Exemple 1 : Calculer les sommes

a)
$$\sum_{p,q \in \mathbb{N}} \frac{p^q}{e^{2p} q!}$$

b)
$$\sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n) - 1) \quad \text{où pour tout } \alpha \in \mathbb{R} : \quad \zeta(\alpha) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

SF 6 : intervertir des sommes « triangulaires »

Exemple 2

a) Etablir :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} = \zeta(2)$$

3 Règles de calcul

SF 6 : intervertir des sommes « triangulaires »

Exemple 2

a) Etablir :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} = \zeta(2)$$

b) Justifier la convergence et calculer :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$$

3 Règles de calcul

SF 7 : sommer à « $p + q$ constant »

Exemple 3

Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$ la somme $\sum_{p,q \in \mathbb{N}^*} \frac{p}{(p+q)^\alpha}$ est-elle réelle ?

3 Règles de calcul

En pratique : utiliser une décomposition en éléments simples

Exemple 4 : Montrer que

$$\sum_{p,q \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{pq(p+q-1)} = 2\zeta(2)$$

II Familles sommables de nombres complexes

I Famille quelconque d'éléments de $[0, +\infty]$

II Familles sommables de nombres complexes

III Applications aux sommes doubles

1 Sommabilité d'une famille de complexes

Cadre

- $(u_i)_{i \in I}$ est une famille de nombres complexes

Définition 1

La famille $(u_i)_{i \in I}$ est *sommable* lorsque :

1 Sommabilité d'une famille de complexes

Cadre

- $(u_i)_{i \in I}$ est une famille de nombres complexes

Définition 1

La famille $(u_i)_{i \in I}$ est *sommable* lorsque : $\sum_{i \in I} |u_i| < +\infty$

1 Sommabilité d'une famille de complexes

Cadre

- $(u_i)_{i \in I}$ est une famille de nombres complexes

bien défini
dans $[0, +\infty]$

Définition 1

La famille $(u_i)_{i \in I}$ est *sommable* lorsque :

$$\sum_{i \in I} |u_i| < +\infty$$

1 Sommabilité d'une famille de complexes

Cadre ensemble noté $\ell_1(I)$

- $(u_i)_{i \in I}$ est une famille de nombres complexes

bien défini
dans $[0, +\infty]$

Définition 1

La famille $(u_i)_{i \in I}$ est *sommable* lorsque :

$$\sum_{i \in I} |u_i| < +\infty$$

1 Sommabilité d'une famille de complexes

Cadre ensemble noté $\ell_1(I)$

- $(u_i)_{i \in I}$ est une famille de nombres complexes

bien défini
dans $[0, +\infty]$

Définition 1

La famille $(u_i)_{i \in I}$ est *sommable* lorsque :

$$\sum_{i \in I} |u_i| < +\infty$$

Cas des séries. Pour $I = \mathbb{N}$

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est sommable ssi

1 Sommabilité d'une famille de complexes

Cadre ensemble noté $\ell_1(I)$

- $(u_i)_{i \in I}$ est une famille de nombres complexes

bien défini
dans $[0, +\infty]$

Définition 1

La famille $(u_i)_{i \in I}$ est *sommable* lorsque :
$$\sum_{i \in I} |u_i| < +\infty$$

Cas des séries. Pour $I = \mathbb{N}$

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est sommable ssi la série $\sum u_n$ converge absolument.

1 Sommabilité d'une famille de complexes

Cadre

ensemble noté $\ell_1(I)$

- $(u_i)_{i \in I}$ est une famille de nombres complexes

bien défini
dans $[0, +\infty]$

Définition 1

La famille $(u_i)_{i \in I}$ est *sommable* lorsque :

$$\sum_{i \in I} |u_i| < +\infty$$

Cas des séries. Pour $I = \mathbb{N}$

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est sommable ssi la série $\sum u_n$ converge absolument.

Remarque

Toute sous-famille d'une famille sommable est encore sommable.

1 Sommabilité d'une famille de complexes

Cadre ensemble noté $\ell_1(I)$

- $(u_i)_{i \in I}$ est une famille de nombres complexes

bien défini
dans $[0, +\infty]$

Définition 1

La famille $(u_i)_{i \in I}$ est *sommable* lorsque :

$$\sum_{i \in I} |u_i| < +\infty$$

Cas des séries. Pour $I = \mathbb{N}$

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est sommable ssi la série $\sum u_n$ converge absolument.

Remarque

Si $(v_i)_{i \in I}$ est une famille sommable de $[0, +\infty]$ telle que $|u_i| \leq v_i$ pour tout $i \in I$, alors $(u_i)_{i \in I}$ est sommable.

1 Sommabilité d'une famille de complexes

Cadre

- $(u_i)_{i \in I}$ est une famille de nombres complexes

ensemble noté $\ell_1(I)$

bien défini
dans $[0, +\infty]$

Définition 1

La famille $(u_i)_{i \in I}$ est *sommable* lorsque : $\sum_{i \in I} |u_i| < +\infty$

Cas des séries. Pour $I = \mathbb{N}$

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est sommable ssi la série $\sum u_n$ converge absolument.

Exemple 1 : Sont-elles sommables ?

a) $\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right)_{n \geq 1}$

1 Sommabilité d'une famille de complexes

Cadre

- $(u_i)_{i \in I}$ est une famille de nombres complexes

ensemble noté $\ell_1(I)$

bien défini
dans $[0, +\infty]$

Définition 1

La famille $(u_i)_{i \in I}$ est *sommable* lorsque : $\sum_{i \in I} |u_i| < +\infty$

Cas des séries. Pour $I = \mathbb{N}$

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est sommable ssi la série $\sum u_n$ converge absolument.

Exemple 1 : Sont-elles sommables ?

$$\text{b) } \left(\frac{\sin(p+q)}{p^2 q^2} \right)_{p,q \geq 1}$$

1 Sommabilité d'une famille de complexes

Cadre

ensemble noté $\ell_1(I)$

- $(u_i)_{i \in I}$ est une famille de nombres complexes

bien défini

dans $[0, +\infty]$

Définition 1

La famille $(u_i)_{i \in I}$ est *sommable* lorsque :

$$\sum_{i \in I} |u_i| < +\infty$$

Cas des séries. Pour $I = \mathbb{N}$

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est sommable ssi la série $\sum u_n$ converge absolument.

Exemple 1 : Sont-elles sommables ?

c) $(z^{ij})_{i,j \geq 1}$

1 Sommabilité d'une famille de complexes

Cadre

- $(u_i)_{i \in I}$ est une famille de nombres complexes

ensemble noté $\ell_1(I)$

bien défini
dans $[0, +\infty]$

Définition 1

La famille $(u_i)_{i \in I}$ est *sommable* lorsque : $\sum_{i \in I} |u_i| < +\infty$

Cas des séries. Pour $I = \mathbb{N}$

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est sommable ssi la série $\sum u_n$ converge absolument.

Exemple 1 : Sont-elles sommables ?

$$\text{d) } \left(\frac{1}{n^2 - p^2} \right)_{\substack{n, p \geq 1 \\ n \neq p}}$$

2 Somme d'une famille sommable de complexes

Cadre

- $(u_i)_{i \in I}$ est une famille sommable de nombres complexes

Cas d'une famille de réels

Cas d'une famille de complexes

2 Somme d'une famille sommable de complexes

comment définir $\sum_{i \in I} u_i$?

Cadre

- $(u_i)_{i \in I}$ est une famille sommable de nombres complexes

Cas d'une famille de réels

Cas d'une famille de complexes

2 Somme d'une famille sommable de complexes

comment définir $\sum_{i \in I} u_i$?

Cadre

- $(u_i)_{i \in I}$ est une famille sommable de nombres complexes

Cas d'une famille de réels

$$\sum_{i \in I} u_i \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} \sum_{i \in I} u_i^+ - \sum_{i \in I} u_i^-$$

Cas d'une famille de complexes

2 Somme d'une famille sommable de complexes

comment définir $\sum_{i \in I} u_i$?

Cadre

- $(u_i)_{i \in I}$ est une famille sommable de nombres complexe

Cas d'une famille de réels

$$\sum_{i \in I} u_i \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} \sum_{i \in I} u_i^+ - \sum_{i \in I} u_i^-$$

Cas d'une famille de complexes

$$\sum_{i \in I} u_i \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} \sum_{i \in I} \operatorname{Re}(u_i) + i \sum_{i \in I} \operatorname{Im}(u_i)$$

2 Somme d'une famille sommable de complexes

comment définir $\sum_{i \in I} u_i$?

Cadre

- $(u_i)_{i \in I}$ est une famille sommable de nombres complexes

Cas d'une famille de réels

$$\sum_{i \in I} u_i \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} \sum_{i \in I} u_i^+ - \sum_{i \in I} u_i^-$$

Cas d'une famille de complexes

$$\sum_{i \in I} u_i \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} \sum_{i \in I} \operatorname{Re}(u_i) + i \sum_{i \in I} \operatorname{Im}(u_i)$$

Exercice 1

Justifier dans chacun des deux cas que le nombre $\sum_{i \in I} u_i$ est bien défini.

3 Propriétés des familles sommables

Cadre

$(u_i)_{i \in I}, (v_i)_{i \in I}$ sont des familles sommables de complexes

Théorème 1 : Opérations

- *Linéarité.*

3 Propriétés des familles sommables

Cadre

$(u_i)_{i \in I}, (v_i)_{i \in I}$ sont des familles sommables de complexes

Théorème 1 : Opérations

▪ *Linéarité.*
$$\sum_{i \in I} \lambda u_i + \mu v_i = \lambda \sum_{i \in I} u_i + \mu \sum_{i \in I} v_i$$

3 Propriétés des familles sommables

Cadre

$(u_i)_{i \in I}, (v_i)_{i \in I}$ sont des familles sommables de complexes

Théorème 1 : Opérations

- *Linéarité.*
$$\sum_{i \in I} \lambda u_i + \mu v_i = \lambda \sum_{i \in I} u_i + \mu \sum_{i \in I} v_i$$
- *Inégalité triangulaire.*

3 Propriétés des familles sommables

Cadre

$(u_i)_{i \in I}, (v_i)_{i \in I}$ sont des familles sommables de complexes

Théorème 1 : Opérations

- *Linéarité.*
$$\sum_{i \in I} \lambda u_i + \mu v_i = \lambda \sum_{i \in I} u_i + \mu \sum_{i \in I} v_i$$
- *Inégalité triangulaire.*
$$\left| \sum_{i \in I} u_i \right| \leq \sum_{i \in I} |u_i|$$

3 Propriétés des familles sommables

Cadre

$(u_i)_{i \in I}, (v_i)_{i \in I}$ sont des familles sommables de complexes

Théorème 1 : Opérations

- *Linéarité.*
$$\sum_{i \in I} \lambda u_i + \mu v_i = \lambda \sum_{i \in I} u_i + \mu \sum_{i \in I} v_i$$
- *Inégalité triangulaire.*
$$\left| \sum_{i \in I} u_i \right| \leq \sum_{i \in I} |u_i|$$
- *Invariance par permutation.*
$$\sum_{i \in I} u_{\sigma(i)} = \sum_{i \in I} u_i$$

3 Propriétés des familles sommables

Cadre

$(u_i)_{i \in I}, (v_i)_{i \in I}$ sont des familles sommables de complexes

Théorème 1 : Opérations

- *Linéarité.*
$$\sum_{i \in I} \lambda u_i + \mu v_i = \lambda \sum_{i \in I} u_i + \mu \sum_{i \in I} v_i$$
- *Inégalité triangulaire.*
$$\left| \sum_{i \in I} u_i \right| \leq \sum_{i \in I} |u_i|$$
- *Invariance par permutation.*
$$\sum_{i \in I} u_{\sigma(i)} = \sum_{i \in I} u_i$$

Conséquence

$\ell_1(I)$ est :

3 Propriétés des familles sommables

Cadre

$(u_i)_{i \in I}, (v_i)_{i \in I}$ sont des familles sommables de complexes

Théorème 1 : Opérations

- *Linéarité.* $\sum_{i \in I} \lambda u_i + \mu v_i = \lambda \sum_{i \in I} u_i + \mu \sum_{i \in I} v_i$
- *Inégalité triangulaire.* $\left| \sum_{i \in I} u_i \right| \leq \sum_{i \in I} |u_i|$
- *Invariance par permutation.* $\sum_{i \in I} u_{\sigma(i)} = \sum_{i \in I} u_i$

Conséquence

$\ell_1(I)$ est : un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^I$

3 Propriétés des familles sommables

Cadre

$(u_i)_{i \in I}, (v_i)_{i \in I}$ sont des familles sommables de complexes

Théorème 1 : Opérations

- *Linéarité.* $\sum_{i \in I} \lambda u_i + \mu v_i = \lambda \sum_{i \in I} u_i + \mu \sum_{i \in I} v_i$
- *Inégalité triangulaire.* $\left| \sum_{i \in I} u_i \right| \leq \sum_{i \in I} |u_i|$
- *Invariance par permutation.* $\sum_{i \in I} u_{\sigma(i)} = \sum_{i \in I} u_i$

Exercice 2

Démontrer le théorème.

3 Propriétés des familles sommables

Théorème 2 : Sommation par paquets (admis)

Soit $(I_k)_{k \in K}$ un recouvrement disjoint de I .

La famille $\left(\sum_{i \in I_k} u_i \right)_{k \in K}$ est sommable et :

3 Propriétés des familles sommables

Théorème 2 : Sommation par paquets (admis)

Soit $(I_k)_{k \in K}$ un recouvrement disjoint de I .

La famille $\left(\sum_{i \in I_k} u_i \right)_{k \in K}$ est sommable et :
$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} u_i$$

3 Propriétés des familles sommables

Théorème 2 : Sommation par paquets (admis)

Soit $(I_k)_{k \in K}$ un recouvrement disjoint de I .

La famille $\left(\sum_{i \in I_k} u_i \right)_{k \in K}$ est sommable et : $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} u_i$

SF 2 : Justifier la sommabilité ET calculer la somme

Exemple 2 : Justifier l'existence et calculer

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{2^n}$$

3 Propriétés des familles sommables

Théorème 3 : Approximation par des sommes finies

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie J de I telle que :

3 Propriétés des familles sommables

Théorème 3 : Approximation par des sommes finies

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie J de I telle que :

$$\left| \sum_{i \in I} u_i - \sum_{i \in J} u_i \right| \leq \varepsilon$$

3 Propriétés des familles sommables

Théorème 3 : Approximation par des sommes finies

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie J de I telle que :

$$\left| \sum_{i \in I} u_i - \sum_{i \in J} u_i \right| \leq \varepsilon$$

Exercice 3

Démontrer le théorème dans le cas où $(u_i)_{i \in I}$ est une famille de réels.

III Applications aux sommes doubles

- I Famille quelconque d'éléments de $[0, +\infty]$
- II Familles sommables de nombres complexes
- III Applications aux sommes doubles

1 Théorème de Fubini et produits de sommes

Théorème 1 : Fubini

Soit $(u_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille sommable de complexes.

Les familles $\left(\sum_{j \in J} u_{ij}\right)_{i \in I}$ et $\left(\sum_{i \in I} u_{ij}\right)_{j \in J}$ sont sommables et :

1 Théorème de Fubini et produits de sommes

Théorème 1 : Fubini

Soit $(u_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille sommable de complexes.

Les familles $\left(\sum_{j \in J} u_{ij}\right)_{i \in I}$ et $\left(\sum_{i \in I} u_{ij}\right)_{j \in J}$ sont sommables et :

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{ij} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_{ij} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} u_{ij}$$

1 Théorème de Fubini et produits de sommes

Théorème 1 : Fubini

Soit $(u_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille sommable de complexes.

Les familles $\left(\sum_{j \in J} u_{ij}\right)_{i \in I}$ et $\left(\sum_{i \in I} u_{ij}\right)_{j \in J}$ sont sommables et :

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{ij} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_{ij} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} u_{ij}$$

Exercice 1

Démontrer le théorème de Fubini à l'aide du théorème de sommation par paquets

1 Théorème de Fubini et produits de sommes

Théorème 1 : Fubini

Soit $(u_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille sommable de complexes.

Les familles $\left(\sum_{j \in J} u_{ij}\right)_{i \in I}$ et $\left(\sum_{i \in I} u_{ij}\right)_{j \in J}$ sont sommables et :

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{ij} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_{ij} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} u_{ij}$$

Exemple 1 : $z \in \mathbb{C}^*$ est tel que $|z| < 1$

Etablir :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{z^{2p-1}}{1 - z^{2p-1}} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{z^p}{1 - z^{2p}}$$

1 Théorème de Fubini et produits de sommes

Théorème 2 : Familles « produits »

Soit $(u_i)_{i \in I}, (v_j)_{j \in J}$ des familles sommables de complexes.

La famille $(u_i v_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est elle aussi sommable et :

1 Théorème de Fubini et produits de sommes

Théorème 2 : Familles « produits »

Soit $(u_i)_{i \in I}, (v_j)_{j \in J}$ des familles sommables de complexes.

La famille $(u_i v_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est elle aussi sommable et :

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_i v_j = \sum_{i \in I} u_i \times \sum_{j \in J} v_j$$

1 Théorème de Fubini et produits de sommes

Théorème 2 : Familles « produits »

Soit $(u_i)_{i \in I}, (v_j)_{j \in J}$ des familles sommables de complexes.

La famille $(u_i v_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est elle aussi sommable et :

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_i v_j = \sum_{i \in I} u_i \times \sum_{j \in J} v_j$$

Remarque

Se généralise au produit d'un nombre fini de familles sommables.

1 Théorème de Fubini et produits de sommes

Théorème 2 : Familles « produits »

Soit $(u_i)_{i \in I}, (v_j)_{j \in J}$ des familles sommables de complexes.

La famille $(u_i v_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est elle aussi sommable et :

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_i v_j = \sum_{i \in I} u_i \times \sum_{j \in J} v_j$$

Exercice 2

Démontrer ce théorème à l'aide du théorème de Fubini.

1 Théorème de Fubini et produits de sommes

Théorème 2 : Familles « produits »

Soit $(u_i)_{i \in I}, (v_j)_{j \in J}$ des familles sommables de complexes.

La famille $(u_i v_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est elle aussi sommable et :

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_i v_j = \sum_{i \in I} u_i \times \sum_{j \in J} v_j$$

Exemple 2 : Justifier l'existence et calculer : $\sum_{n \in I} a_n.$

$(a_n)_{n \in I}$ est la famille $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n \in I}$ où I est l'ensemble des entiers naturels non nuls n'ayant aucun diviseur premier autre que 2, 3 ou 5.

2 Produit de Cauchy

Théorème 3

Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries de nombres complexes absolument convergentes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$\sum c_n$ est absolument convergente et :

2 Produit de Cauchy

Théorème 3

Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries de nombres complexes absolument convergentes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

$\sum c_n$ est absolument convergente et :

2 Produit de Cauchy

Théorème 3

Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries de nombres complexes absolument convergentes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

$\sum c_n$ est absolument convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

2 Produit de Cauchy

Théorème 3

Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries de nombres complexes absolument convergentes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

produit de Cauchy de $\sum a_n$ et $\sum b_n$

$\sum c_n$ est absolument convergente et :

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

2 Produit de Cauchy

Théorème 3

Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries de nombres complexes absolument convergentes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

produit de Cauchy de $\sum a_n$ et $\sum b_n$

$\sum c_n$ est absolument convergente et :

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

Exercice 3

Démontrer le théorème.

2 Produit de Cauchy

Théorème 3

Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries de nombres complexes absolument convergentes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

produit de Cauchy de $\sum a_n$ et $\sum b_n$

$\sum c_n$ est absolument convergente et :

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

Exemple 3 : $z \in \mathbb{C}$ est tel que $|z| < 1$

Montrer que :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} n z^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}$$

2 Produit de Cauchy

Théorème 3

Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries de nombres complexes absolument convergentes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

produit de Cauchy de $\sum a_n$ et $\sum b_n$

$\sum c_n$ est absolument convergente et :

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

Exemple 4 : $a, b \in \mathbb{C}$.

Montrer que :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a+b)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b^n}{n!}$$

2 Produit de Cauchy

Théorème 3

Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries de nombres complexes absolument convergentes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

produit de Cauchy de $\sum a_n$ et $\sum b_n$

$\sum c_n$ est absolument convergente et :

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

⚠ Attention ⚠

$\sum c_n$ peut diverger si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ ne sont pas A.C.

2 Produit de Cauchy

Théorème 3

Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries de nombres complexes absolument convergentes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

produit de Cauchy de $\sum a_n$ et $\sum b_n$

$\sum c_n$ est absolument convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

⚠ Attention ⚠

$\sum c_n$ peut diverger si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ ne sont pas A.C.

Exemple 5 : $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Etudier la convergence de $\sum a_n$ $\sum b_n$ et $\sum c_n$