

Déterminants

Chapitre 35

I Définition des déterminants

I Définition des déterminants

II Méthodes de calcul des déterminants

III Compléments

1 Déterminant de n vecteurs dans une base

Cadre

- E est un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$.
- $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E .

1 Déterminant de n vecteurs dans une base

Cadre

- E est un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$.
- $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E .

Théorème 1

On appelle *déterminant de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$* le scalaire :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{déf.}}{=}$$

1 Déterminant de n vecteurs dans une base

Cadre

- E est un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$.
- $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E .

Théorème 1

On appelle *déterminant de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$* le scalaire :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \left(\prod_{j=1}^n a_{\sigma(j),j} \right)$$

1 Déterminant de n vecteurs dans une base

Cadre

- E est un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$.
- $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E .

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} \dots & \overset{x_j}{\downarrow} a_{1,j} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & a_{n,j} & \dots \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow b_1 \\ \vdots \\ \leftarrow b_n \end{matrix}$$

Théorème 1

On appelle *déterminant de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$* le scalaire :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \left(\prod_{j=1}^n a_{\sigma(j),j} \right)$$

1 Déterminant de n vecteurs dans une base

Cadre

- E est un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$.
- $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E .

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} \dots & \overset{x_j}{\downarrow} a_{1,j} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & a_{n,j} & \dots \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow b_1 \\ \vdots \\ \leftarrow b_n \end{matrix}$$

Théorème 1

On appelle *déterminant de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$* le scalaire :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \left(\prod_{j=1}^n a_{\sigma(j),j} \right)$$

1. L'application $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme n -linéaire alternée.

1 Déterminant de n vecteurs dans une base

Cadre

- E est un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$.
- $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E .

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} \dots & \overset{x_j}{\downarrow} a_{1,j} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & a_{n,j} & \dots \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow b_1 \\ \vdots \\ \leftarrow b_n \end{matrix}$$

Théorème 1

On appelle *déterminant de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$* le scalaire :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \left(\prod_{j=1}^n a_{\sigma(j),j} \right)$$

1. L'application $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme n -linéaire alternée.
2. Toute autre forme n -linéaire alternée sur E en est un multiple.

1 Déterminant de n vecteurs dans une base

Cadre

- E est un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$.
- $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E .

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} \dots & \overset{x_j}{\downarrow} a_{1,j} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & a_{n,j} & \dots \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow b_1 \\ \vdots \\ \leftarrow b_n \end{matrix}$$

Théorème 1

On appelle *déterminant de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$* le scalaire :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \left(\prod_{j=1}^n a_{\sigma(j),j} \right)$$

1. L'application $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme n -linéaire alternée.
2. Toute autre forme n -linéaire alternée sur E en est un multiple.
3. C'est l'unique forme n -linéaire alternée t.q.

1 Déterminant de n vecteurs dans une base

Cadre

- E est un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$.
- $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E .

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} \dots & \overset{x_j}{\downarrow} a_{1,j} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & a_{n,j} & \dots \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow b_1 \\ \vdots \\ \leftarrow b_n \end{matrix}$$

Théorème 1

On appelle *déterminant de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$* le scalaire :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \left(\prod_{j=1}^n a_{\sigma(j),j} \right)$$

1. L'application $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme n -linéaire alternée.
2. Toute autre forme n -linéaire alternée sur E en est un multiple.
3. C'est l'unique forme n -linéaire alternée t.q. $\det_{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_n) = 1$

1 Déterminant de n vecteurs dans une base

Cadre

- E est un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$.
- $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E .

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} \dots & \overset{x_j}{\downarrow} a_{1,j} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & a_{n,j} & \dots \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow b_1 \\ \vdots \\ \leftarrow b_n \end{matrix}$$

Théorème 1

On appelle *déterminant de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$* le scalaire :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \left(\prod_{j=1}^n a_{\sigma(j),j} \right)$$

1. L'application $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme n -linéaire alternée.
2. Toute autre forme n -linéaire alternée sur E en est un multiple.
3. C'est l'unique forme n -linéaire alternée t.q. $\det_{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_n) = 1$

noté $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})$

1 Déterminant de n vecteurs dans une base

Théorème 1

On appelle *déterminant de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$* le scalaire :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \left(\prod_{j=1}^n a_{\sigma(j), j} \right)$$

1. L'application $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme n -linéaire alternée.
2. Toute autre forme n -linéaire alternée sur E en est un multiple.
3. C'est l'unique forme n -linéaire alternée t.q. $\det_{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_n) = 1$

noté $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})$

Exercice 1 : Cas $n = 2$

- a) Donner l'expression de $\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2)$

1 Déterminant de n vecteurs dans une base

Théorème 1

On appelle *déterminant de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$* le scalaire :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \left(\prod_{j=1}^n a_{\sigma(j), j} \right)$$

1. L'application $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme n -linéaire alternée.
2. Toute autre forme n -linéaire alternée sur E en est un multiple.
3. C'est l'unique forme n -linéaire alternée t.q. $\det_{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_n) = 1$

Exercice 1 : Cas $n = 2$

noté $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})$

b) Calculer : $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}$

1 Déterminant de n vecteurs dans une base

Théorème 1

On appelle *déterminant de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$* le scalaire :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \left(\prod_{j=1}^n a_{\sigma(j), j} \right)$$

1. L'application $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme n -linéaire alternée.
2. Toute autre forme n -linéaire alternée sur E en est un multiple.
3. C'est l'unique forme n -linéaire alternée t.q. $\det_{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_n) = 1$

Exercice 2 : Cas $n = 3$

noté $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})$

a) Donner l'expression de $\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, x_3)$

1 Déterminant de n vecteurs dans une base

Théorème 1

On appelle *déterminant de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$* le scalaire :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \left(\prod_{j=1}^n a_{\sigma(j), j} \right)$$

1. L'application $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme n -linéaire alternée.
2. Toute autre forme n -linéaire alternée sur E en est un multiple.
3. C'est l'unique forme n -linéaire alternée t.q. $\det_{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_n) = 1$

Exercice 2 : Cas $n = 3$

noté $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})$

b) Calculer :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

1 Déterminant de n vecteurs dans une base

Théorème 1

On appelle *déterminant de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$* le scalaire :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \left(\prod_{j=1}^n a_{\sigma(j), j} \right)$$

1. L'application $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme n -linéaire alternée.
2. Toute autre forme n -linéaire alternée sur E en est un multiple.
3. C'est l'unique forme n -linéaire alternée t.q. $\det_{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_n) = 1$

Théorème 2 : Propriétés des déterminants

noté $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})$

- Si $\mathcal{B}'$ est une autre base de E :
- $\mathcal{F}$ est une base de E ssi :

1 Déterminant de n vecteurs dans une base

Théorème 1

On appelle *déterminant de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$* le scalaire :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \left(\prod_{j=1}^n a_{\sigma(j), j} \right)$$

1. L'application $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme n -linéaire alternée.
2. Toute autre forme n -linéaire alternée sur E en est un multiple.
3. C'est l'unique forme n -linéaire alternée t.q. $\det_{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_n) = 1$

Théorème 2 : Propriétés des déterminants

noté $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})$

- Si $\mathcal{B}'$ est une autre base de E : $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{F}) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$
- $\mathcal{F}$ est une base de E ssi :

1 Déterminant de n vecteurs dans une base

Théorème 1

On appelle *déterminant de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$* le scalaire :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \left(\prod_{j=1}^n a_{\sigma(j), j} \right)$$

1. L'application $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme n -linéaire alternée.
2. Toute autre forme n -linéaire alternée sur E en est un multiple.
3. C'est l'unique forme n -linéaire alternée t.q. $\det_{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_n) = 1$

Théorème 2 : Propriétés des déterminants

noté $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})$

- Si $\mathcal{B}'$ est une autre base de E : $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{F}) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$
- $\mathcal{F}$ est une base de E ssi : $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$.

1 Déterminant de n vecteurs dans une base

Théorème 1

On appelle *déterminant de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$* le scalaire :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \left(\prod_{j=1}^n a_{\sigma(j), j} \right)$$

1. L'application $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme n -linéaire alternée.
2. Toute autre forme n -linéaire alternée sur E en est un multiple.
3. C'est l'unique forme n -linéaire alternée t.q. $\det_{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_n) = 1$

Théorème 2 : Propriétés des déterminants

noté $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})$

- Si $\mathcal{B}'$ est une autre base de E : $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{F}) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$
- $\mathcal{F}$ est une base de E ssi : $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$.

Exercice 3 : Démontrer le théorème

1 Déterminant de n vecteurs dans une base

SF 8 : Pour montrer qu'une famille de n vecteurs est une base

Il suffit de vérifier que son déterminant dans une base de E n'est pas nul.

Exemple 1

1. On pose $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 2, 3)$ et $u_3 = (1, 1, 2)$.

Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Les polynômes :

$$P_1 = X^2, \quad P_2 = a(X - 1)^2 \quad \text{et} \quad P_3 = a^2 X^2 + aX + 1$$

forment-ils une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

2 Déterminant d'une matrice carrée

Définition 1

Le *déterminant* de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est défini comme le déterminant de la famille des colonnes de A dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$:

- $\det(A) \underset{\text{déf.}}{=}$
- Cette quantité est notée :

2 Déterminant d'une matrice carrée

Définition 1

Le *déterminant* de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est défini comme le déterminant de la famille des colonnes de A dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$:

- $\det(A) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \left(\prod_{j=1}^n a_{\sigma(j),j} \right)$
- Cette quantité est notée :

2 Déterminant d'une matrice carrée

Définition 1

Le *déterminant* de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est défini comme le déterminant de la famille des colonnes de A dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$:

- $\det(A) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \left(\prod_{j=1}^n a_{\sigma(j),j} \right)$

- Cette quantité est notée :
$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

2 Déterminant d'une matrice carrée

Définition 1

Le *déterminant* de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est défini comme le déterminant de la famille des colonnes de A dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$:

- $\det(A) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \left(\prod_{j=1}^n a_{\sigma(j),j} \right)$
- Cette quantité est notée :
$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Exemple 2 : Déterminant de l'identité

Montrer : a) $\det(I_n) = 1$ b) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \det(\lambda I_n) = \lambda^n$

2 Déterminant d'une matrice carrée

Théorème 3

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

2 Déterminant d'une matrice carrée

Théorème 3

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. $\det(AB) = (\det A) \times (\det B)$

2 Déterminant d'une matrice carrée

Théorème 3

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. $\det(AB) = (\det A) \times (\det B)$
2. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$

2 Déterminant d'une matrice carrée

Théorème 3

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. $\det(AB) = (\det A) \times (\det B)$
2. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$
3. $A \in GL_n(\mathbb{K})$ ssi

2 Déterminant d'une matrice carrée

Théorème 3

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. $\det(AB) = (\det A) \times (\det B)$
2. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$
3. $A \in GL_n(\mathbb{K})$ ssi $\det(A) \neq 0$.

2 Déterminant d'une matrice carrée

Théorème 3

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. $\det(AB) = (\det A) \times (\det B)$
2. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$
3. $A \in GL_n(\mathbb{K})$ ssi $\det(A) \neq 0$. En ce cas : $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

2 Déterminant d'une matrice carrée

Théorème 3

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. $\det(AB) = (\det A) \times (\det B)$

2. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$

3. $A \in GL_n(\mathbb{K})$ ssi $\det(A) \neq 0$. En ce cas : $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

⚠ **Attention** ⚠ Le déterminant n'est pas linéaire, en particulier :

$$\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$$

2 Déterminant d'une matrice carrée

Théorème 3

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. $\det(AB) = (\det A) \times (\det B)$

2. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$

3. $A \in GL_n(\mathbb{K})$ ssi $\det(A) \neq 0$. En ce cas : $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

⚡ **Attention** ⚡ Le déterminant n'est pas linéaire, en particulier :

$$\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$$

Exercice 4

Démontrer le théorème.

2 Déterminant d'une matrice carrée

Théorème 3

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. $\det(AB) = (\det A) \times (\det B)$

2. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$

3. $A \in GL_n(\mathbb{K})$ ssi $\det(A) \neq 0$. En ce cas : $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

⚡ **Attention** ⚡ Le déterminant n'est pas linéaire, en particulier :
 $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$

Conséquence du point 3 à retenir

$\det(A) = 0$ ssi les colonnes de A sont liées. Ainsi $\det(A) = 0$ si :

2 Déterminant d'une matrice carrée

Théorème 3

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. $\det(AB) = (\det A) \times (\det B)$

2. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$

3. $A \in GL_n(\mathbb{K})$ ssi $\det(A) \neq 0$. En ce cas : $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

⚡ **Attention** ⚡ Le déterminant n'est pas linéaire, en particulier :
 $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$

Conséquence du point 3 à retenir

$\det(A) = 0$ ssi les colonnes de A sont liées. Ainsi $\det(A) = 0$ si :

- Une colonne est nulle

2 Déterminant d'une matrice carrée

Théorème 3

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. $\det(AB) = (\det A) \times (\det B)$

2. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$

3. $A \in GL_n(\mathbb{K})$ ssi $\det(A) \neq 0$. En ce cas : $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

⚡ **Attention** ⚡ Le déterminant n'est pas linéaire, en particulier :
 $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$

Conséquence du point 3 à retenir

$\det(A) = 0$ ssi les colonnes de A sont liées. Ainsi $\det(A) = 0$ si :

- Une colonne est nulle
- Deux colonnes sont identiques

2 Déterminant d'une matrice carrée

Théorème 3

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. $\det(AB) = (\det A) \times (\det B)$

2. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$

3. $A \in GL_n(\mathbb{K})$ ssi $\det(A) \neq 0$. En ce cas : $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

⚡ **Attention** ⚡ Le déterminant n'est pas linéaire, en particulier :
 $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$

Conséquence du point 3 à retenir

$\det(A) = 0$ ssi les colonnes de A sont liées. Ainsi $\det(A) = 0$ si :

- Une colonne est nulle
- Deux colonnes sont identiques
- Deux colonnes sont colinéaires

2 Déterminant d'une matrice carrée

Théorème 4 : Transposée

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

2 Déterminant d'une matrice carrée

Théorème 4 : Transposée

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\det(A^\top) = \det A$.

2 Déterminant d'une matrice carrée

Théorème 4 : Transposée

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\det(A^\top) = \det A$.

Exercice 5

Démontrer le théorème en utilisant la définition du déterminant.

2 Déterminant d'une matrice carrée

Théorème 4 : Transposée

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\det(A^\top) = \det A$.

Exercice 5

Démontrer le théorème en utilisant la définition du déterminant.

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \left(\prod_{j=1}^n a_{\sigma(j),j} \right)$$

2 Déterminant d'une matrice carrée

Exercice 6

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme :
$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline * & \dots & * & a_{n,n} \end{array} \right).$$

Montrer que : $\det(A) = a_{n,n} \det(A')$.

2 Déterminant d'une matrice carrée

Exercice 6

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme :
$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & A' & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline * & \dots & * & a_{n,n} \end{array} \right).$$

Montrer que : $\det(A) = a_{n,n} \det(A')$.

Théorème 5 : Matrices triangulaires

Si $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice triangulaire : $\det(T) =$

2 Déterminant d'une matrice carrée

Exercice 6

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme :
$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline * & \dots & * & a_{n,n} \end{array} \right).$$

Montrer que : $\det(A) = a_{n,n} \det(A')$.

Théorème 5 : Matrices triangulaires

Si $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice triangulaire :
$$\det(T) = \prod_{j=1}^n t_{j,j}$$

II Méthodes de calcul des déterminants

I Définition des déterminants

II Méthodes de calcul des déterminants

III Compléments

1 Par opérations élémentaires

Théorème 1 : Effets des opérations élémentaires

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

i) $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ou $C_j \leftarrow \lambda C_j$:

1 Par opérations élémentaires

Théorème 1 : Effets des opérations élémentaires

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

i) $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ou $C_j \leftarrow \lambda C_j$: multiplie le déterminant par λ .

1 Par opérations élémentaires

Théorème 1 : Effets des opérations élémentaires

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

i) $L_i \longleftarrow \lambda L_i$ ou $C_j \longleftarrow \lambda C_j$: multiplie le déterminant par λ .

i) $L_i \longleftrightarrow L_j$ ou $C_i \longleftrightarrow C_j$:

1 Par opérations élémentaires

Théorème 1 : Effets des opérations élémentaires

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

i) $L_i \longleftarrow \lambda L_i$ ou $C_j \longleftarrow \lambda C_j$: multiplie le déterminant par λ .

ii) $L_i \longleftrightarrow L_j$ ou $C_i \longleftrightarrow C_j$: multiplie le déterminant par -1 .

1 Par opérations élémentaires

Théorème 1 : Effets des opérations élémentaires

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

i) $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ou $C_j \leftarrow \lambda C_j$: multiplie le déterminant par λ .

i) $L_i \longleftrightarrow L_j$ ou $C_i \longleftrightarrow C_j$: multiplie le déterminant par -1 .

i) $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ou $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$:

1 Par opérations élémentaires

Théorème 1 : Effets des opérations élémentaires

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- i) $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ou $C_j \leftarrow \lambda C_j$: multiplie le déterminant par λ .
- i) $L_i \longleftrightarrow L_j$ ou $C_i \longleftrightarrow C_j$: multiplie le déterminant par -1 .
- i) $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ou $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$: ne change pas le déterminant.

1 Par opérations élémentaires

Théorème 1 : Effets des opérations élémentaires

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- i) $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ou $C_j \leftarrow \lambda C_j$: multiplie le déterminant par λ .
- ii) $L_i \longleftrightarrow L_j$ ou $C_i \longleftrightarrow C_j$: multiplie le déterminant par -1 .
- iii) $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ou $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$: ne change pas le déterminant.

SF 5 : calculer un déterminant par opérations élémentaires

Exemple 1 : Calculer

a)
$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

1 Par opérations élémentaires

Théorème 1 : Effets des opérations élémentaires

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- i) $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ou $C_j \leftarrow \lambda C_j$: multiplie le déterminant par λ .
- i) $L_i \longleftrightarrow L_j$ ou $C_i \longleftrightarrow C_j$: multiplie le déterminant par -1 .
- i) $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ou $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$: ne change pas le déterminant.

SF 5 : calculer un déterminant par opérations élémentaires

Exemple 1 : Calculer

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$$

1 Par opérations élémentaires

Théorème 1 : Effets des opérations élémentaires

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- i) $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ou $C_j \leftarrow \lambda C_j$: multiplie le déterminant par λ .
- ii) $L_i \longleftrightarrow L_j$ ou $C_i \longleftrightarrow C_j$: multiplie le déterminant par -1 .
- iii) $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ou $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$: ne change pas le déterminant.

SF 5 : calculer un déterminant par opérations élémentaires

Exemple 1 : Calculer

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} a^2 & ab & ac & ad \\ a^2 & b^2 & bc & bd \\ a^2 & b^2 & c^2 & cd \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix}$$

1 Par opérations élémentaires

Théorème 1 : Effets des opérations élémentaires

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

i) $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ou $C_j \leftarrow \lambda C_j$: multiplie le déterminant par λ .

i) $L_i \longleftrightarrow L_j$ ou $C_i \longleftrightarrow C_j$: multiplie le déterminant par -1 .

i) $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ou $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$: ne change pas le déterminant.

SF 5 : calculer un déterminant par opérations élémentaires

Exemple 1 : Calculer

$$\text{d) } \Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & \dots & & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & & b & a \end{vmatrix}$$

2 Par développement suivant une ligne ou une colonne

Vocabulaire

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

On note $A_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de A et on pose $\Delta_{i,j} = \det A_{i,j}$

2 Par développement suivant une ligne ou une colonne

Mineur de A
associé à (i, j)

Vocabulaire

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

On note $A_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de A et on pose $\Delta_{i,j} = \det A_{i,j}$

2 Par développement suivant une ligne ou une colonne

Mineur de A
associé à (i, j)

Vocabulaire

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

On note $A_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de A et on pose $\Delta_{i,j} = \det A_{i,j}$

Théorème 2

- *Dév. par rapport à la colonne j .*

2 Par développement suivant une ligne ou une colonne

Mineur de A
associé à (i, j)

Vocabulaire

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

On note $A_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de A et on pose $\Delta_{i,j} = \det A_{i,j}$

Théorème 2

- *Dév. par rapport à la colonne j .* $\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$

2 Par développement suivant une ligne ou une colonne

Mineur de A
associé à (i, j)

Vocabulaire

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

On note $A_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de A et on pose $\Delta_{i,j} = \det A_{i,j}$

Théorème 2

- *Dév. par rapport à la colonne j .* $\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$
- *Dév. par rapport à la ligne i .*

2 Par développement suivant une ligne ou une colonne

Mineur de A
associé à (i, j)

Vocabulaire

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

On note $A_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de A et on pose $\Delta_{i,j} = \det A_{i,j}$

Théorème 2

- *Dév. par rapport à la colonne j .* $\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$
- *Dév. par rapport à la ligne i .* $\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$

2 Par développement suivant une ligne ou une colonne

Mineur de A
associé à (i, j)

Vocabulaire

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

On note $A_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de A et on pose $\Delta_{i,j} = \det A_{i,j}$

Théorème 2

- *Dév. par rapport à la colonne j .* $\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$
- *Dév. par rapport à la ligne i .* $\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$

Exercice 1

Démontrer la formule de développement selon la colonne j .

2 Par développement suivant une ligne ou une colonne

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} \det(M_{i,j})$$

$$A = \begin{pmatrix} B_{i,j} & \begin{matrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{matrix} & C_{i,j} \\ D_{i,j} & a_{i,j} & E_{i,j} \end{pmatrix}$$

2 Par développement suivant une ligne ou une colonne

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} \det(M_{i,j})$$

$$A = \begin{pmatrix} B_{i,j} & \begin{matrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{matrix} & C_{i,j} \\ D_{i,j} & & E_{i,j} \end{pmatrix}$$
$$M_{i,j} = \begin{pmatrix} B_{i,j} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & C_{i,j} \\ D_{i,j} & & E_{i,j} \end{pmatrix}$$

2 Par développement suivant une ligne ou une colonne

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} \det(M_{i,j})$$

$$A = \begin{pmatrix} B_{i,j} & \overset{j}{\overset{\circ}{a_{1,j}}} & C_{i,j} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{i,j} & \underset{a_{n,j}}{\vdots} & E_{i,j} \end{pmatrix} \underset{i}{\underset{\circ}{i}}$$

$$M_{i,j} = \begin{pmatrix} B_{i,j} & \overset{j}{\overset{\circ}{\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}}} & C_{i,j} \\ D_{i,j} & \underset{\begin{matrix} \vdots \\ 0 \end{matrix}}{\vdots} & \underset{n-j}{\underset{\circ}{E_{i,j}}} \end{pmatrix}$$

$$M'_{i,j} = \begin{pmatrix} & 0 \\ & \vdots \\ A_{i,j} & 0 \\ & 1 \end{pmatrix}$$

2 Par développement suivant une ligne ou une colonne

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} \det(M_{i,j})$$

$$A = \begin{pmatrix} B_{i,j} & \overset{j}{\overset{\circ}{a_{1,j}}} & C_{i,j} \\ & \vdots & \\ D_{i,j} & \underset{a_{n,j}}{\underset{\circ}{}} & E_{i,j} \end{pmatrix} \quad \overset{i}{\overset{\circ}{i}}$$

$$M_{i,j} = \begin{pmatrix} B_{i,j} & \overset{j}{\overset{\circ}{0}} & C_{i,j} \\ & \vdots & \\ D_{i,j} & \underset{1}{\underset{\circ}{}} & E_{i,j} \end{pmatrix} \quad \overset{i}{\overset{\circ}{i}} \quad \begin{matrix} n-i \\ \longleftrightarrow \\ n-j \end{matrix}$$

$$\det(M_{i,j}) = (-1)^{2n-i-j} \det(M'_{i,j})$$

$$M'_{i,j} = \begin{pmatrix} & 0 \\ & \vdots \\ A_{i,j} & 0 \\ & 1 \end{pmatrix}$$

2 Par développement suivant une ligne ou une colonne

Exemple 2 : Pour s'entraîner à appliquer la formule

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ en développant :

- a) par rapport à la première ligne
- b) par rapport à la deuxième colonne

2 Par développement suivant une ligne ou une colonne

Exemple 2 : Pour s'entraîner à appliquer la formule

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ en développant :

- a) par rapport à la première ligne
- b) par rapport à la deuxième colonne

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \pm \textcircled{1} \times \quad \pm \textcircled{2} \times \quad \pm \textcircled{3} \times$

2 Par développement suivant une ligne ou une colonne

Exemple 2 : Pour s'entraîner à appliquer la formule

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ en développant :

- a) par rapport à la première ligne
- b) par rapport à la deuxième colonne

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \pm (1) \times \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \pm (2) \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} \pm (3) \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

2 Par développement suivant une ligne ou une colonne

Exemple 2 : Pour s'entraîner à appliquer la formule

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ en développant :

- a) par rapport à la première ligne
- b) par rapport à la deuxième colonne

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \pm \textcircled{1} \times \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \pm \textcircled{2} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \pm \textcircled{3} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

2 Par développement suivant une ligne ou une colonne

Exemple 2 : Pour s'entraîner à appliquer la formule

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ en développant :

- a) par rapport à la première ligne
- b) par rapport à la deuxième colonne

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \pm \textcircled{1} \times \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \pm \textcircled{2} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \pm \textcircled{3} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

2 Par développement suivant une ligne ou une colonne

Exemple 2 : Pour s'entraîner à appliquer la formule

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ en développant :

- a) par rapport à la première ligne
- b) par rapport à la deuxième colonne

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = + (1) \times \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} - (2) \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + (3) \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

2 Par développement suivant une ligne ou une colonne

Exemple 2 : Pour s'entraîner à appliquer la formule

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ en développant :

- a) par rapport à la première ligne
- b) par rapport à la deuxième colonne

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = + (1) \times \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} - (2) \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + (3) \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

2 Par développement suivant une ligne ou une colonne

Exemple 2 : Pour s'entraîner à appliquer la formule

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ en développant :

- a) par rapport à la première ligne
- b) par rapport à la deuxième colonne

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = + (1) \times \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} - (2) \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + (3) \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

2 Par développement suivant une ligne ou une colonne

SF 5 : Calculer un déterminant par dév. suivant une rangée

Méthode efficace lorsqu'une ligne/colonne contient beaucoup de 0.

Exemple 3

Calculer le déterminant suivant : $D_1 = \begin{vmatrix} 12 & 1 & -8 \\ 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$

2 Par développement suivant une ligne ou une colonne

Exemple 4 : $u_1 = (1, 2, -1)$ et $u_2 = (-2, -1, 1)$

Déterminer une équation du sous-espace vectoriel $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$

Application 1 : déterminant de Vandermonde

Notation

Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. On pose $V(a_1, \dots, a_n) =$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Application 1 : déterminant de Vandermonde

Notation

Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. On pose $V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$

Théorème 3

▪ $V(a_1, \dots, a_n) =$

Application 1 : déterminant de Vandermonde

Notation

Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. On pose $V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$

Théorème 3

- $V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$

Application 1 : déterminant de Vandermonde

Notation

Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. On pose $V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$

Théorème 3

- $V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$
- $V(a_1, \dots, a_n) \neq 0$ ssi :

Application 1 : déterminant de Vandermonde

Notation

Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. On pose $V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$

Théorème 3

- $V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$
- $V(a_1, \dots, a_n) \neq 0$ ssi : les a_i sont distincts

Application 1 : déterminant de Vandermonde

Notation

Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. On pose $V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$

Théorème 3

- $V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$
- $V(a_1, \dots, a_n) \neq 0$ ssi : les a_i sont distincts

Exercice 2 : On suppose $a_1, \dots, a_n$ distincts

1. Montrer que la fonction $P : x \mapsto V(a_1, \dots, a_n, x)$ vérifie :

$$P(x) = V(a_1, \dots, a_n) \times \prod_{i=1}^n (x - a_i) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{C}$$

Application 1 : déterminant de Vandermonde

Notation

Soit $P(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & x \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 & x^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n & x^n \end{vmatrix}$, $\dots$, $a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$

Théorème 3

- $V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$
- $V(a_1, \dots, a_n) \neq 0$ ssi : les a_i sont distincts

Exercice 2 : On suppose $a_1, \dots, a_n$ distincts

1. Montrer que la fonction $P : x \mapsto V(a_1, \dots, a_n, x)$ vérifie :

$$P(x) = V(a_1, \dots, a_n) \times \prod_{i=1}^n (x - a_i) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{C}$$

Application 1 : déterminant de Vandermonde

Notation

Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. On pose $V(a_1, \dots, a_n) =$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Théorème 3

- $V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$
- $V(a_1, \dots, a_n) \neq 0$ ssi : les a_i sont distincts

Exercice 2 : On suppose $a_1, \dots, a_n$ distincts

2. Comment pourrait-on utiliser cette formule pour en déduire l'expression du théorème précédent ?

Exemple 5

Pour tout $n \geq 1$, on considère le déterminant de taille n :

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.
2. En déduire D_n en fonction de n pour tout $n \geq 1$.

III Compléments

I Définition des déterminants

II Méthodes de calcul des déterminants

III Compléments

1 Comatrice

Rappel

Dév. par rapport à la ligne i : $\det(A) =$

1 Comatrice

Rappel

Dév. par rapport à la ligne i : $\det(A) = \sum_{k=1}^n a_{i,k} (-1)^{i+k} \Delta_{i,k}$

1 Comatrice

Rappel

Dév. par rapport à la ligne i : $\det(A) = \sum_{k=1}^n a_{i,k} (-1)^{i+k} \Delta_{i,k}$

1 Comatrice

Rappel

cofacteur de A associé à (i, k)

Dév. par rapport à la ligne i : $\det(A) = \sum_{k=1}^n a_{i,k} (-1)^{i+k} \Delta_{i,k}$

1 Comatrice

Rappel

cofacteur de A associé à (i, k)

Dév. par rapport à la ligne i : $\det(A) = \sum_{k=1}^n a_{i,k} (-1)^{i+k} \Delta_{i,k}$

Définition 1

La *comatrice* de A , notée $\text{com}(A)$, est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont les cofacteurs de A :

1 Comatrice

Rappel

cofacteur de A associé à (i, k)

Dév. par rapport à la ligne i : $\det(A) = \sum_{k=1}^n a_{i,k} (-1)^{i+k} \Delta_{i,k}$

Définition 1

La *comatrice* de A , notée $\text{com}(A)$, est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont les cofacteurs de A :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (\text{com}(A))_{i,j} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$$

1 Comatrice

Rappel

cofacteur de A associé à (i, k)

Dév. par rapport à la ligne i : $\det(A) = \sum_{k=1}^n a_{i,k} (-1)^{i+k} \Delta_{i,k}$

Définition 1

La *comatrice* de A , notée $\text{com}(A)$, est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont les cofacteurs de A :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (\text{com}(A))_{i,j} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$$

Exemple 1

Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ montrer que : $\text{com}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1 Comatrice

Rappel

cofacteur de A associé à (i, k)

Dév. par rapport à la ligne i : $\det(A) = \sum_{k=1}^n a_{i,k} (-1)^{i+k} \Delta_{i,k}$

Définition 1

La *comatrice* de A , notée $\text{com}(A)$, est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont les cofacteurs de A :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (\text{com}(A))_{i,j} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$$

Exemple 2 : $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

Calculer $\text{com}(A)$. Que constate-t-on lorsque A est inversible ?

Théorème 1

Théorème 1

$$A \times \operatorname{com}(A)^{\top} = \operatorname{com}(A)^{\top} \times A = (\det A) \times I_n$$

1 Comatrice

Théorème 1

$$A \times \text{com}(A)^{\top} = \text{com}(A)^{\top} \times A = (\det A) \times I_n$$

Exercice 1

Démontrer le théorème.

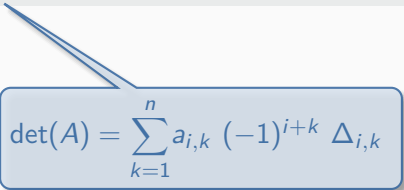
1 Comatrice

Théorème 1

$$A \times \text{com}(A)^{\top} = \text{com}(A)^{\top} \times A = (\det A) \times I_n$$

Exercice 1

Démontrer le théorème.


$$\det(A) = \sum_{k=1}^n a_{i,k} (-1)^{i+k} \Delta_{i,k}$$

1 Comatrice

Théorème 1

$$A \times \text{com}(A)^{\top} = \text{com}(A)^{\top} \times A = (\det A) \times I_n$$

Théorème 2

Si A est inversible :

1 Comatrice

Théorème 1

$$A \times \text{com}(A)^{\top} = \text{com}(A)^{\top} \times A = (\det A) \times I_n$$

Théorème 2

Si A est inversible :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{com}(A)^{\top}$$

1 Comatrice

Théorème 1

$$A \times \text{com}(A)^{\top} = \text{com}(A)^{\top} \times A = (\det A) \times I_n$$

Théorème 2

Si A est inversible : $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{com}(A)^{\top}$

⚠ Attention ⚠

Formule théorique : ne pas l'utiliser pour inverser une matrice concrète.

1 Comatrice

Théorème 1

$$A \times \text{com}(A)^T = \text{com}(A)^T \times A = (\det A) \times I_n$$

Théorème 2

Si A est inversible : $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{com}(A)^T$

⚠ Attention ⚠

Formule théorique : ne pas l'utiliser pour inverser une matrice concrète.

Exercice 2

Déduire cette formule du théorème précédent.

2 Déterminant d'un endomorphisme

Cadre

- E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.
- f est un endomorphisme de E .

Définition 2

On définit le déterminant de f par :

2 Déterminant d'un endomorphisme

Cadre

- E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.
- f est un endomorphisme de E .

Définition 2

On définit le déterminant de f par : $\det(f) \stackrel{\text{déf.}}{=} \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}} f)$

2 Déterminant d'un endomorphisme

Cadre

- E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.
- f est un endomorphisme de E .

Définition 2

On définit le déterminant de f par : $\det(f) \stackrel{\text{déf.}}{=} \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}} f)$
dans n'importe quelle base $\mathcal{B}$ de E

2 Déterminant d'un endomorphisme

Cadre

- E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.
- f est un endomorphisme de E .

les matrices qui représentent f
ont toutes le même déterminant

Définition 2

On définit le déterminant de f par : $\det(f) \stackrel{\text{déf.}}{=} \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}} f)$
dans n'importe quelle base $\mathcal{B}$ de E

2 Déterminant d'un endomorphisme

Cadre

- E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.
- f est un endomorphisme de E .
- $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E .

les matrices qui représentent f
ont toutes le même déterminant

Définition 2

On définit le déterminant de f par : $\det(f) \stackrel{\text{déf.}}{=} \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}} f)$
dans n'importe quelle base $\mathcal{B}$ de E

2 Déterminant d'un endomorphisme

Cadre

- E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.
- f est un endomorphisme de E .
- $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E .
- On pose : $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}} f$ et $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'} f$.

Exercice 3

Montrer que : $\det(A) = \det(A')$.

les matrices qui représentent f
ont toutes le même déterminant

Définition 2

On définit le déterminant de f par : $\det(f) \stackrel{\text{déf.}}{=} \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}} f)$
dans n'importe quelle base $\mathcal{B}$ de E

2 Déterminant d'un endomorphisme

Exercice 4 : F, G sont deux sous-espaces supplémentaires de E

On note s la symétrie par rapport à F et parallèlement à G .
Calculer le déterminant de s en fonction de $q = \dim G$.

2 Déterminant d'un endomorphisme

Théorème 3 : Version endomorphisme des propriétés du déterminant

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

2 Déterminant d'un endomorphisme

Théorème 3 : Version endomorphisme des propriétés du déterminant

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. $\det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g)$.

2 Déterminant d'un endomorphisme

Théorème 3 : Version endomorphisme des propriétés du déterminant

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. $\det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g)$.
2. $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$.

2 Déterminant d'un endomorphisme

Théorème 3 : Version endomorphisme des propriétés du déterminant

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. $\det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g)$.
2. $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$.
3. $f \in \text{GL}(E)$ ssi

2 Déterminant d'un endomorphisme

Théorème 3 : Version endomorphisme des propriétés du déterminant

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. $\det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g)$.

2. $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$.

3. $f \in \text{GL}(E)$ ssi $\det(f) \neq 0$. En ce cas : $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$

2 Déterminant d'un endomorphisme

Théorème 3 : Version endomorphisme des propriétés du déterminant

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. $\det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g)$.

2. $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$.

3. $f \in \text{GL}(E)$ ssi $\det(f) \neq 0$. En ce cas : $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$

Exercice 5

Démontrer le point 1.

3 Déterminants triangulaires par blocs

Théorème 4

Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$:

3 Déterminants triangulaires par blocs

Théorème 4

Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$:

$$\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} =$$

3 Déterminants triangulaires par blocs

Théorème 4

Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$:

$$\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \det(A) \times \det(B)$$

3 Déterminants triangulaires par blocs

Théorème 4

Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$:

$$\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \det(A) \times \det(B)$$

Exercice 6

Démontrer cette formule.

3 Déterminants triangulaires par blocs

Théorème 4

Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$:

$$\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \det(A) \times \det(B)$$

Exercice 6

Démontrer cette formule.

Exemple 3

A l'aide de la formule précédente, calculer :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$