

Complément sur les permutations

Chapitre 34

I Permutations

I Permutations

II Formes n linéaires alternées

1 Le groupe symétrique

Rappels

- Une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ est :

1 Le groupe symétrique

Rappels


$$n \in \mathbb{N}^*$$

- Une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ est :

1 Le groupe symétrique

Rappels


$$n \in \mathbb{N}^*$$

- Une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ est :une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

1 Le groupe symétrique


$$n \in \mathbb{N}^*$$

Rappels

- Une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ est : une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.
- $(S_n, \circ)$ est :

1 Le groupe symétrique

ensemble des
permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$

$n \in \mathbb{N}^*$

- Une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ est : une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.
- $(S_n, \circ)$ est :

1 Le groupe symétrique

ensemble des
permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$

$n \in \mathbb{N}^*$

- Une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ est : une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.
- $(S_n, \circ)$ est : un groupe

1 Le groupe symétrique

ensemble des
permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$

$n \in \mathbb{N}^*$

- Une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ est : une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.
- $(S_n, \circ)$ est : un groupe

groupe symétrique
de $\llbracket 1, n \rrbracket$

1 Le groupe symétrique

ensemble des
permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$

$n \in \mathbb{N}^*$

- Une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ est : une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.
- $(S_n, \circ)$ est : un groupe
- $\text{Card}(S_n) =$

groupe symétrique
de $\llbracket 1, n \rrbracket$

1 Le groupe symétrique

ensemble des
permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$

$n \in \mathbb{N}^*$

- Une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ est : une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.
- $(S_n, \circ)$ est : un groupe
- $\text{Card}(S_n) = n!$

groupe symétrique
de $\llbracket 1, n \rrbracket$

1 Le groupe symétrique

ensemble des
permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$

$n \in \mathbb{N}^*$

- Une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ est : une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.
- $(S_n, \circ)$ est : un groupe
- $\text{Card}(S_n) = n!$

groupe symétrique
de $\llbracket 1, n \rrbracket$

Représentation d'une permutation

- Une permutation $\sigma \in S_n$ est représentée par un tableau.

1 Le groupe symétrique

ensemble des
permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$

$n \in \mathbb{N}^*$

- Une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ est : une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.
- $(S_n, \circ)$ est : un groupe
- $\text{Card}(S_n) = n!$

groupe symétrique
de $\llbracket 1, n \rrbracket$

Représentation d'une permutation

- Une permutation $\sigma \in S_n$ est représentée par un tableau.
- Par exemple, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ est la permutation de S_4 définie par :

1 Le groupe symétrique

ensemble des
permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$

$n \in \mathbb{N}^*$

- Une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ est : une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.
- $(S_n, \circ)$ est : un groupe
- $\text{Card}(S_n) = n!$

groupe symétrique
de $\llbracket 1, n \rrbracket$

Représentation d'une permutation

- Une permutation $\sigma \in S_n$ est représentée par un tableau.
- Par exemple, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ est la permutation de S_4 définie par : $\sigma(1) = 3, \quad \sigma(2) = 2, \quad \sigma(3) = 4, \quad \sigma(4) = 1$

1 Le groupe symétrique

ensemble des
permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$

$n \in \mathbb{N}^*$

- Une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ est : une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.
- $(S_n, \circ)$ est : un groupe
- $\text{Card}(S_n) = n!$

groupe symétrique
de $\llbracket 1, n \rrbracket$

Représentation d'une permutation

- Une permutation $\sigma \in S_n$ est représentée par un tableau.
- Par exemple, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ est la permutation de S_4 définie par : $\sigma(1) = 3, \quad \sigma(2) = 2, \quad \sigma(3) = 4, \quad \sigma(4) = 1$

Exemple 1 : Calculer : $\sigma' \circ \sigma$ et σ^{-1}

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Définition 1

Permutation τ qui *échange deux éléments et laisse les autres invariants i.e.* :

Définition 1

Permutation τ qui *échange deux éléments et laisse les autres invariants* i.e. : il existe $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ distincts tels que

$$\tau(i) = j, \quad \tau(j) = i, \quad \text{et} \quad \tau(k) = k \quad \text{si } k \notin \{i, j\}$$

Définition 1

Permutation τ qui *échange deux éléments et laisse les autres invariants* i.e. : il existe $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ distincts tels que

$$\tau(i) = j, \quad \tau(j) = i, \quad \text{et} \quad \tau(k) = k \quad \text{si } k \notin \{i, j\}$$

On note : $\tau = (i, j)$.

Définition 1

Permutation τ qui *échange deux éléments et laisse les autres invariants* i.e. : il existe $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ distincts tels que

$$\tau(i) = j, \quad \tau(j) = i, \quad \text{et} \quad \tau(k) = k \quad \text{si } k \notin \{i, j\}$$

On note : $\tau = (i, j)$.

Exemple 2 : Dans S_6

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ est la transposition :

Définition 1

Permutation τ qui *échange deux éléments et laisse les autres invariants* i.e. : il existe $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ distincts tels que

$$\tau(i) = j, \quad \tau(j) = i, \quad \text{et} \quad \tau(k) = k \quad \text{si } k \notin \{i, j\}$$

On note : $\tau = (i, j)$.

Exemple 2 : Dans S_6

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ est la transposition : $(3, 5)$

Définition 1

Permutation τ qui échange deux éléments et laisse les autres invariants i.e. : il existe $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ distincts tels que

$$\tau(i) = j, \quad \tau(j) = i, \quad \text{et} \quad \tau(k) = k \quad \text{si } k \notin \{i, j\}$$

On note : $\tau = (i, j)$.

Exemple 2 : Dans S_6

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ est la transposition : $(3, 5)$

Remarque

Toute transposition (i, j) vérifie :

Définition 1

Permutation τ qui *échange deux éléments et laisse les autres invariants* i.e. : il existe $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ distincts tels que

$$\tau(i) = j, \quad \tau(j) = i, \quad \text{et} \quad \tau(k) = k \quad \text{si } k \notin \{i, j\}$$

On note : $\tau = (i, j)$.

Exemple 2 : Dans S_6

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ est la transposition : $(3, 5)$

Remarque

Toute transposition (i, j) vérifie :

■ $(i, j) =$ ■ ■

Définition 1

Permutation τ qui *échange deux éléments et laisse les autres invariants* i.e. : il existe $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ distincts tels que

$$\tau(i) = j, \quad \tau(j) = i, \quad \text{et} \quad \tau(k) = k \quad \text{si } k \notin \{i, j\}$$

On note : $\tau = (i, j)$.

Exemple 2 : Dans S_6

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ est la transposition : $(3, 5)$

Remarque

Toute transposition (i, j) vérifie :

- $(i, j) = (j, i)$ ▪

Définition 1

Permutation τ qui *échange deux éléments et laisse les autres invariants* i.e. : il existe $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ distincts tels que

$$\tau(i) = j, \quad \tau(j) = i, \quad \text{et} \quad \tau(k) = k \quad \text{si } k \notin \{i, j\}$$

On note : $\tau = (i, j)$.

Exemple 2 : Dans S_6

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ est la transposition : $(3, 5)$

Remarque

Toute transposition (i, j) vérifie :

$$\blacksquare (i, j) = (j, i) \quad \blacksquare (i, j)^{-1} = \blacksquare$$

Définition 1

Permutation τ qui *échange deux éléments et laisse les autres invariants* i.e. : il existe $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ distincts tels que

$$\tau(i) = j, \quad \tau(j) = i, \quad \text{et} \quad \tau(k) = k \quad \text{si } k \notin \{i, j\}$$

On note : $\tau = (i, j)$.

Exemple 2 : Dans S_6

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ est la transposition : $(3, 5)$

Remarque

Toute transposition (i, j) vérifie :

$$\blacksquare (i, j) = (j, i) \quad \blacksquare (i, j)^{-1} = (i, j) \quad \blacksquare$$

Définition 1

Permutation τ qui *échange deux éléments et laisse les autres invariants* i.e. : il existe $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ distincts tels que

$$\tau(i) = j, \quad \tau(j) = i, \quad \text{et} \quad \tau(k) = k \quad \text{si } k \notin \{i, j\}$$

On note : $\tau = (i, j)$.

Exemple 2 : Dans S_6

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ est la transposition : $(3, 5)$

Remarque

Toute transposition (i, j) vérifie :

- $(i, j) = (j, i)$
- $(i, j)^{-1} = (i, j)$
- $\sigma \circ (i, j) \circ \sigma^{-1} =$

Définition 1

Permutation τ qui *échange deux éléments et laisse les autres invariants* i.e. : il existe $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ distincts tels que

$$\tau(i) = j, \quad \tau(j) = i, \quad \text{et} \quad \tau(k) = k \quad \text{si } k \notin \{i, j\}$$

On note : $\tau = (i, j)$.

Exemple 2 : Dans S_6

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ est la transposition : $(3, 5)$

Remarque

Toute transposition (i, j) vérifie :

- $(i, j) = (j, i)$
- $(i, j)^{-1} = (i, j)$
- $\sigma \circ (i, j) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(i), \sigma(j))$

Définition 2

Permutation $\sigma \in S_n$ pour laquelle il existe $x_1, \dots, x_p$ distincts ($p \geq 2$) tels que :

On note :

Définition 2

Permutation $\sigma \in S_n$ pour laquelle il existe $x_1, \dots, x_p$ distincts ($p \geq 2$) tels que :

- $\sigma(x_1) = x_2,$

On note :

Définition 2

Permutation $\sigma \in S_n$ pour laquelle il existe $x_1, \dots, x_p$ distincts ($p \geq 2$) tels que :

- $\sigma(x_1) = x_2, \quad \sigma(x_2) = x_3,$

On note :

Définition 2

Permutation $\sigma \in S_n$ pour laquelle il existe $x_1, \dots, x_p$ distincts ($p \geq 2$) tels que :

- $\sigma(x_1) = x_2, \quad \sigma(x_2) = x_3, \quad \dots \quad \sigma(x_{p-1}) = x_p,$

On note :

Définition 2

Permutation $\sigma \in S_n$ pour laquelle il existe $x_1, \dots, x_p$ distincts ($p \geq 2$) tels que :

$$\blacksquare \quad \sigma(x_1) = x_2, \quad \sigma(x_2) = x_3, \quad \dots \quad \sigma(x_{p-1}) = x_p, \quad \sigma(x_p) = x_1$$

On note :

Définition 2

Permutation $\sigma \in S_n$ pour laquelle il existe $x_1, \dots, x_p$ distincts ($p \geq 2$) tels que :

- $\sigma(x_1) = x_2, \quad \sigma(x_2) = x_3, \quad \dots \quad \sigma(x_{p-1}) = x_p, \quad \sigma(x_p) = x_1$
- $\sigma(x) = x$ si $x \notin \{x_1, \dots, x_p\}$

On note :

Définition 2

Permutation $\sigma \in S_n$ pour laquelle il existe $x_1, \dots, x_p$ distincts ($p \geq 2$) tels que :

- $\sigma(x_1) = x_2, \quad \sigma(x_2) = x_3, \quad \dots \quad \sigma(x_{p-1}) = x_p, \quad \sigma(x_p) = x_1$
- $\sigma(x) = x$ si $x \notin \{x_1, \dots, x_p\}$



Support
du cycle

On note :

Définition 2

Permutation $\sigma \in S_n$ pour laquelle il existe $x_1, \dots, x_p$ distincts ($p \geq 2$) tels que :

- $\sigma(x_1) = x_2, \quad \sigma(x_2) = x_3, \quad \dots \quad \sigma(x_{p-1}) = x_p, \quad \sigma(x_p) = x_1$
- $\sigma(x) = x$ si $x \notin \{x_1, \dots, x_p\}$

On note : $\sigma = (x_1, x_2, \dots, x_p)$



Support
du cycle

Longueur du cycle

Définition 2

Permutation $\sigma \in S_n$ pour laquelle il existe $x_1, \dots, x_p$ distincts ($p \geq 2$) tels que :

- $\sigma(x_1) = x_2, \quad \sigma(x_2) = x_3, \quad \dots \quad \sigma(x_{p-1}) = x_p, \quad \sigma(x_p) = x_1$
- $\sigma(x) = x$ si $x \notin \{x_1, \dots, x_p\}$

Support
du cycle

On note : $\sigma = (x_1, x_2, \dots, x_p)$

Longueur du cycle

Définition 2

Permutation $\sigma \in S_n$ pour laquelle il existe $x_1, \dots, x_p$ distincts ($p \geq 2$) tels que :

- $\sigma(x_1) = x_2, \sigma(x_2) = x_3, \dots, \sigma(x_{p-1}) = x_p, \sigma(x_p) = x_1$
- $\sigma(x) = x$ si $x \notin \{x_1, \dots, x_p\}$

Support
du cycle

On note : $\sigma = (x_1, x_2, \dots, x_p)$

Exemple 3 : Le retour du dénombrement

Soient $x_1, \dots, x_p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, distincts.

Combien peut-on former de cycles de support $\{x_1, \dots, x_p\}$?

Longueur du cycle

Définition 2

Permutation $\sigma \in S_n$ pour laquelle il existe $x_1, \dots, x_p$ distincts ($p \geq 2$) tels que :

- $\sigma(x_1) = x_2, \sigma(x_2) = x_3, \dots, \sigma(x_{p-1}) = x_p, \sigma(x_p) = x_1$
- $\sigma(x) = x$ si $x \notin \{x_1, \dots, x_p\}$

Support
du cycle

On note : $\sigma = (x_1, x_2, \dots, x_p)$

Exercice 1

On suppose $c = (x_1, \dots, x_p)$ et $c' = (y_1, \dots, y_q)$ disjoints .
Montrer que : $c \circ c' = c' \circ c$.

Longueur du cycle

Définition 2

Permutation $\sigma \in S_n$ pour laquelle il existe $x_1, \dots, x_p$ distincts ($p \geq 2$) tels que :

- $\sigma(x_1) = x_2, \sigma(x_2) = x_3, \dots, \sigma(x_{p-1}) = x_p, \sigma(x_p) = x_1$
- $\sigma(x) = x$ si $x \notin \{x_1, \dots, x_p\}$

Support
du cycle

On note : $\sigma = (x_1, x_2, \dots, x_p)$

$$\{x_1, \dots, x_p\} \cap \{y_1, \dots, y_q\} = \emptyset$$

Exercice 1

On suppose $c = (x_1, \dots, x_p)$ et $c' = (y_1, \dots, y_q)$ disjoints .
Montrer que : $c \circ c' = c' \circ c$.

2 Décompositions d'une permutation

Exercice 2 : $\sigma \in S_n$ est fixée

Relation sur $\llbracket 1, n \rrbracket$: $x \sim y \iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid y = \sigma^k(x)$.

1. Montrer la relation « $\sim$ » est une relation d'équivalence sur $\llbracket 1, n \rrbracket$

2 Décompositions d'une permutation

Exercice 2 : $\sigma \in S_n$ est fixée

Relation sur $\llbracket 1, n \rrbracket$: $x \sim y \iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid y = \sigma^k(x)$.

1. Montrer la relation « $\sim$ » est une relation d'équivalence sur $\llbracket 1, n \rrbracket$
2. Soit $x \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On pose $\mathcal{O}_x = \{\sigma^k(x); k \in \mathbb{Z}\}$.

Montrer qu'il existe $p \geq 1$ tel que $\mathcal{O}_x = \{x, \sigma(x), \dots, \sigma^{p-1}(x)\}$.

2 Décompositions d'une permutation

Exercice 2 : $\sigma \in S_n$ est fixée

Relation sur $\llbracket 1, n \rrbracket$: $x \sim y \iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid y = \sigma^k(x)$.

1. Montrer la relation « $\sim$ » est une relation d'équivalence sur $\llbracket 1, n \rrbracket$

2. Soit $x \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On pose $\mathcal{O}_x = \{\sigma^k(x); k \in \mathbb{Z}\}$.

Montrer qu'il existe $p \geq 1$ tel que $\mathcal{O}_x = \{x, \sigma(x), \dots, \sigma^{p-1}(x)\}$.

3. Montrer qu'il existe des cycles disjoints $c_1, \dots, c_r$ tels que

$$\sigma = c_1 \circ \dots \circ c_r$$

2 Décompositions d'une permutation

Théorème 1

Toute permutation est une composée de cycles disjoints. La décomposition est unique à l'ordre près

2 Décompositions d'une permutation

Théorème 1

Toute permutation est une composée de cycles disjoints. La décomposition est unique à l'ordre près

Exemple 4 : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 9 & 5 & 2 & 1 & 6 & 8 & 7 & 10 & 4 \end{pmatrix}$

Décomposer σ en cycles disjoints.

2 Décompositions d'une permutation

Théorème 1

Toute permutation est une composée de cycles disjoints. La décomposition est unique à l'ordre près

Exemple 5

Dans S_5 justifier : $(1, 3, 5) = (1, 3) \circ (3, 5)$.

2 Décompositions d'une permutation

Théorème 1

Toute permutation est une composée de cycles disjoints. La décomposition est unique à l'ordre près

Exemple 5

Dans S_5 justifier : $(1, 3, 5) = (1, 3) \circ (3, 5)$.

Retenir la « Relation de Chasles »

$$(x_1, x_2, \dots, x_p) = (x_1, x_2) \circ (x_2, x_3) \circ \dots \circ (x_{p-1}, x_p)$$

2 Décompositions d'une permutation

Théorème 1

Toute permutation est une composée de cycles disjoints. La décomposition est unique à l'ordre près

Exemple 5

Dans S_5 justifier : $(1, 3, 5) = (1, 3) \circ (3, 5)$.

Retenir la « Relation de Chasles »

$$(x_1, x_2, \dots, x_p) = (x_1, x_2) \circ (x_2, x_3) \circ \dots \circ (x_{p-1}, x_p)$$

Théorème 2

2 Décompositions d'une permutation

Théorème 1

Toute permutation est une composée de cycles disjoints. La décomposition est unique à l'ordre près

Exemple 5

Dans S_5 justifier : $(1, 3, 5) = (1, 3) \circ (3, 5)$.

Retenir la « Relation de Chasles »

$$(x_1, x_2, \dots, x_p) = (x_1, x_2) \circ (x_2, x_3) \circ \dots \circ (x_{p-1}, x_p)$$

Théorème 2

Toute permutation est une composée de transpositions

2 Décompositions d'une permutation

Théorème 1

Toute permutation est une composée de cycles disjoints. La décomposition est unique à l'ordre près

Exemple 4 : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 9 & 5 & 2 & 1 & 6 & 8 & 7 & 10 & 4 \end{pmatrix}$

Retenir la « Relation de Chasles »

$$(x_1, x_2, \dots, x_p) = (x_1, x_2) \circ (x_2, x_3) \circ \dots \circ (x_{p-1}, x_p)$$

Théorème 2

Toute permutation est une composée de transpositions

Exemple 5 : σ est la permutation de l'exemple 4

Ecrire σ comme une composée de transpositions.

3 Signature

Théorème 3

Il existe un unique morphisme de groupe $\varepsilon : S_n \rightarrow \{-1, 1\}$ tel que :

1. Pour toute transposition τ :
2. Pour tous $\sigma, \sigma' \in S_n$:

3 Signature

Théorème 3

Il existe un unique morphisme de groupe $\varepsilon : S_n \rightarrow \{-1, 1\}$ tel que :

1. Pour toute transposition τ : $\varepsilon(\tau) = -1$
2. Pour tous $\sigma, \sigma' \in S_n$:

3 Signature

Théorème 3

Il existe un unique morphisme de groupe $\varepsilon : S_n \rightarrow \{-1, 1\}$ tel que :

1. Pour toute transposition τ : $\varepsilon(\tau) = -1$
2. Pour tous $\sigma, \sigma' \in S_n$: $\varepsilon(\sigma \circ \sigma') = \varepsilon(\sigma) \circ \varepsilon(\sigma')$.

3 Signature

Théorème 3

Il existe un unique morphisme de groupe $\varepsilon : S_n \rightarrow \{-1, 1\}$ tel que :

1. Pour toute transposition τ : $\varepsilon(\tau) = -1$
2. Pour tous $\sigma, \sigma' \in S_n$: $\varepsilon(\sigma \circ \sigma') = \varepsilon(\sigma) \circ \varepsilon(\sigma')$.

En pratique : trouver la signature de σ

- Méthode 1. *Avec la décomposition en transpositions.*
Si σ est la composée de k transpositions : $\varepsilon(\sigma) = (-1)^k$.
- Méthode 2. *Avec la décomposition en cycles.*
Si c est de longueur p : $\varepsilon(c) = (-1)^{p-1}$.

3 Signature

Théorème 3

Il existe un unique morphisme de groupe $\varepsilon : S_n \rightarrow \{-1, 1\}$ tel que :

1. Pour toute transposition τ : $\varepsilon(\tau) = -1$
2. Pour tous $\sigma, \sigma' \in S_n$: $\varepsilon(\sigma \circ \sigma') = \varepsilon(\sigma) \circ \varepsilon(\sigma')$.

En pratique : trouver la signature de σ

- Méthode 1. *Avec la décomposition en transpositions.*
Si σ est la composée de k transpositions : $\varepsilon(\sigma) = (-1)^k$.
- Méthode 2. *Avec la décomposition en cycles.*
Si c est de longueur p : $\varepsilon(c) = (-1)^{p-1}$.

Exemple 6 : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 9 & 5 & 2 & 1 & 6 & 8 & 7 & 10 & 4 \end{pmatrix}$

Calculer la signature de la permutation σ

II Formes n linéaires alternées

I Permutations

II Formes n linéaires alternées

Notion de forme n -linéaire

$$f : E^n \rightarrow \mathbb{K}$$

Définition 1

f est n -linéaire si elle est « linéaire par rapport à chaque variable »

$$f : E^n \rightarrow \mathbb{K}$$

Définition 1

f est n -linéaire si elle est « linéaire par rapport à chaque variable »

- pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et tous $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n \in E$

Notion de forme n -linéaire

$$f : E^n \rightarrow \mathbb{K}$$

Définition 1

f est n -linéaire si elle est « linéaire par rapport à chaque variable »

- pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et tous $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n \in E$
- l'application

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & f(x_1, \dots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \dots, x_n) \end{array}$$

est linéaire

Notion de forme n -linéaire

$$f : E^n \rightarrow \mathbb{K}$$

Définition 1

f est n -linéaire si elle est « linéaire par rapport à chaque variable »

- pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et tous $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n \in E$
- l'application

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & f(x_1, \dots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \dots, x_n) \end{array}$$

est linéaire

Notion de forme n -linéaire

$$f : E^n \rightarrow \mathbb{K}$$

Définition 1

f est n -linéaire si elle est « linéaire par rapport à chaque variable »

- pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et tous $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n \in E$
- l'application

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & f(x_1, \dots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \dots, x_n) \end{array}$$

est linéaire

Exemple 1

1. Un produit scalaire $(x, y) \mapsto (x | y)$ sur E est en particulier une forme bilinéaire sur E .
2. L'application $f : (A, B, C) \mapsto \text{tr}(ABC)$ est une forme trilinéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Notion de forme n -linéaire

$$f : E^n \rightarrow \mathbb{K}$$

Définition 1

f est n -linéaire si elle est « linéaire par rapport à chaque variable »

- pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et tous $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n \in E$
- l'application

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & f(x_1, \dots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \dots, x_n) \end{array}$$

est linéaire

Exemple 2 : Exemple de référence sur $\mathbb{R}^2$

L'application f définie pour tous $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ par :

$$f(u, v) = xy' - x'y = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$$

est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$.

Définition 2

f est *alternée* si pour tous $x_1, \dots, x_n \in E$:

Définition 2

f est *alternée* si pour tous $x_1, \dots, x_n \in E$:

$f(x_1, \dots, x_n) = 0$ dès que deux des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ sont égaux.

Définition 2

f est *alternée* si pour tous $x_1, \dots, x_n \in E$:

$f(x_1, \dots, x_n) = 0$ dès que deux des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ sont égaux.

Théorème 1

Si f est alternée, alors elle est *antisymétrique* i.e. pour tous $x_1, \dots, x_n \in E$ et toute transposition τ de $\llbracket 1, n \rrbracket$:

Forme n -linéaire alternée

Définition 2

f est *alternée* si pour tous $x_1, \dots, x_n \in E$:

$f(x_1, \dots, x_n) = 0$ dès que deux des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ sont égaux.

Théorème 1

Si f est alternée, alors elle est *antisymétrique* i.e. pour tous $x_1, \dots, x_n \in E$ et toute transposition τ de $\llbracket 1, n \rrbracket$:

$$f(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \dots, x_{\tau(n)}) = -f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Remarque

Si $\tau = (i, j)$:

Forme n -linéaire alternée

Définition 2

f est *alternée* si pour tous $x_1, \dots, x_n \in E$:

$f(x_1, \dots, x_n) = 0$ dès que deux des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ sont égaux.

Théorème 1

Si f est alternée, alors elle est *antisymétrique* i.e. pour tous $x_1, \dots, x_n \in E$ et toute transposition τ de $\llbracket 1, n \rrbracket$:

$$f(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \dots, x_{\tau(n)}) = -f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Remarque

Si $\tau = (i, j)$: $f(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots) = -f(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots)$

Forme n -linéaire alternée

Définition 2

f est *alternée* si pour tous $x_1, \dots, x_n \in E$:

$f(x_1, \dots, x_n) = 0$ dès que deux des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ sont égaux.

Théorème 1

Si f est alternée, alors elle est *antisymétrique* i.e. pour tous $x_1, \dots, x_n \in E$ et toute transposition τ de $\llbracket 1, n \rrbracket$:

$$f(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \dots, x_{\tau(n)}) = -f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Remarque

Si $\tau = (i, j)$: $f(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots) = -f(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots)$

Conséquence

Pour toute permutation σ

Forme n -linéaire alternée

Définition 2

f est *alternée* si pour tous $x_1, \dots, x_n \in E$:

$f(x_1, \dots, x_n) = 0$ dès que deux des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ sont égaux.

Théorème 1

Si f est alternée, alors elle est *antisymétrique* i.e. pour tous $x_1, \dots, x_n \in E$ et toute transposition τ de $\llbracket 1, n \rrbracket$:

$$f(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \dots, x_{\tau(n)}) = -f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Remarque

Si $\tau = (i, j)$: $f(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots) = -f(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots)$

Conséquence

Pour toute permutation σ $f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) =$

Forme n -linéaire alternée

Définition 2

f est *alternée* si pour tous $x_1, \dots, x_n \in E$:

$f(x_1, \dots, x_n) = 0$ dès que deux des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ sont égaux.

Théorème 1

Si f est alternée, alors elle est *antisymétrique* i.e. pour tous $x_1, \dots, x_n \in E$ et toute transposition τ de $\llbracket 1, n \rrbracket$:

$$f(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \dots, x_{\tau(n)}) = -f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Remarque

Si $\tau = (i, j)$: $f(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots) = -f(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots)$

Conséquence

Pour toute permutation σ $f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)f(x_1, \dots, x_n)$

Forme n -linéaire alternée

Définition 2

f est *alternée* si pour tous $x_1, \dots, x_n \in E$:

$f(x_1, \dots, x_n) = 0$ dès que deux des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ sont égaux.

Théorème 1

Si f est alternée, alors elle est *antisymétrique* i.e. pour tous $x_1, \dots, x_n \in E$ et toute transposition τ de $\llbracket 1, n \rrbracket$:

$$f(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \dots, x_{\tau(n)}) = -f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Remarque

Si $\tau = (i, j)$: $f(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots) = -f(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots)$

Pour toute permutation σ $f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)f(x_1, \dots, x_n)$

Exercice 1

Démontrer le théorème dans le cas où $\tau = (1, 2)$.

En pratique : effet des « opérations élémentaires »

Si f est n linéaire alternée

- **Type 1 :** $f(x_1, \dots, \lambda x_i, \dots, x_n) = \lambda f(x_1, \dots, x_n)$

En pratique : effet des « opérations élémentaires »

Si f est n linéaire alternée

- **Type 1 :** $f(x_1, \dots, \lambda x_i, \dots, x_n) = \lambda f(x_1, \dots, x_n)$
- **Type 3 :** $f(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots) = -f(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots)$

En pratique : effet des « opérations élémentaires »

Si f est n linéaire alternée

- **Type 1 :** $f(x_1, \dots, \lambda x_i, \dots, x_n) = \lambda f(x_1, \dots, x_n)$
- **Type 2 :** $f(\dots, x_i + \lambda x_j, \dots, x_j, \dots) = f(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots)$
- **Type 3 :** $f(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots) = -f(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots)$

En pratique : effet des « opérations élémentaires »

Si f est n linéaire alternée

- **Type 1 :** $f(x_1, \dots, \lambda x_i, \dots, x_n) = \lambda f(x_1, \dots, x_n)$
- **Type 2 :** $f(\dots, x_i + \lambda x_j, \dots, x_j, \dots) = f(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots)$
- **Type 3 :** $f(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots) = -f(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots)$

Exercice 2

Démontrer le point 2 i.e. vérifier que :

$$f(\dots, x_i + \lambda x_j, \dots, x_j, \dots) = f(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots)$$

Théorème 2 : Annulation sur toute famille liée

Si f est alterné et si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille liée de n vecteurs de E :

Théorème 2 : Annulation sur toute famille liée

Si f est alterné et si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille liée de n vecteurs de E : $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Théorème 2 : Annulation sur toute famille liée

Si f est alterné et si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille liée de n vecteurs de E : $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Exercice 3

Démontrer le théorème.

Forme n -linéaire alternée

Théorème 2 : Annulation sur toute famille liée

Si f est alterné et si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille liée de n vecteurs de E : $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Exercice 3

Démontrer le théorème.

Exercice 4 : Expression d'une forme n -linéaire alternée

- E est de dimension finie n muni d'une base $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$.
- $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ est une famille de n vecteurs de E
- $(a_{i,j}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$.

Montrer :

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(b_1, \dots, b_n) \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \left(\prod_{j=1}^n a_{\sigma(j),j} \right)$$