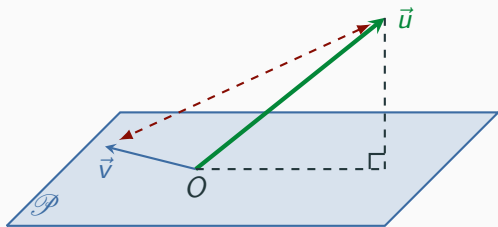


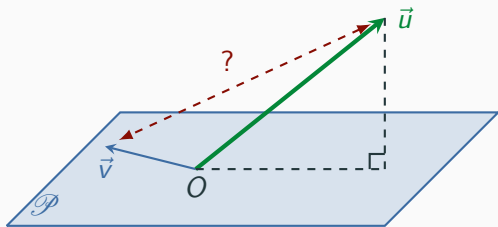
Espaces préhilbertiens

Chapitre 33

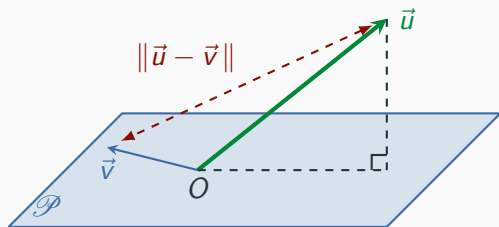
Objectif



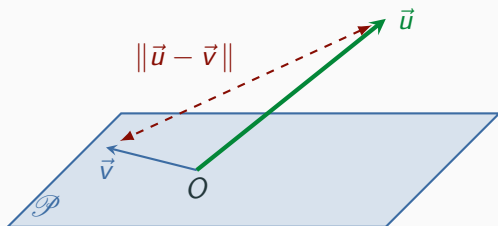
Objectif



Objectif



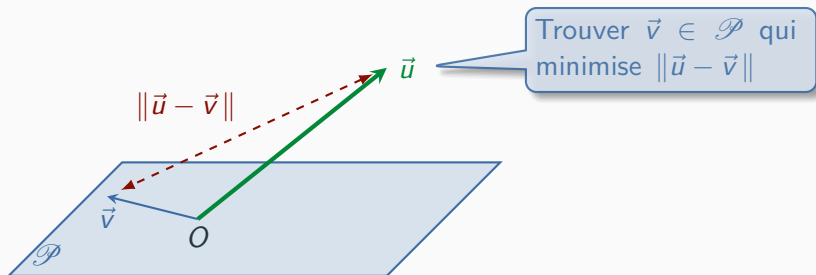
Objectif



Exercice 1

Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ qui minimisent : $\int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt$

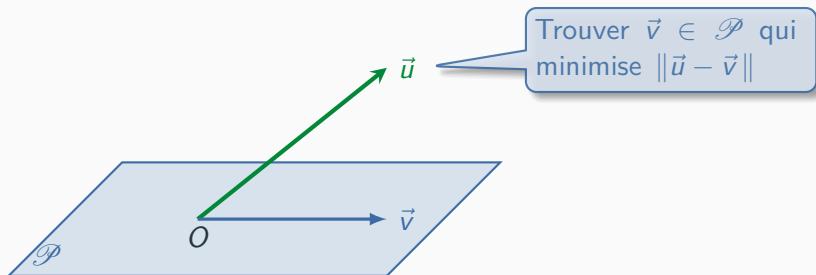
Objectif



Exercice 1

Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ qui minimisent : $\int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt$

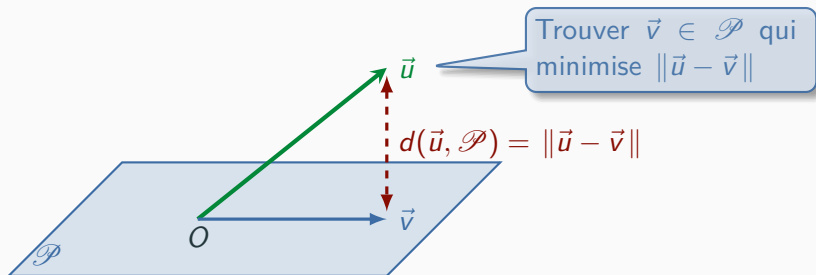
Objectif



Exercice 1

Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ qui minimisent : $\int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt$

Objectif



Exercice 1

Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ qui minimisent : $\int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt$

I Produit scalaire

I Produit scalaire

II Orthogonalité dans un espace préhilbertien

III Projection orthogonale sur un sous-espace

IV Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

1 Définitions

Définition 1

Un produit scalaire sur E

1 Définitions

Espace vectoriel réel

Définition 1

Un produit scalaire sur E

1 Définitions

Espace vectoriel réel

Définition 1

Un produit scalaire sur E est une *forme bilinéaire symétrique définie positive* i.e. une application :

1 Définitions

Espace vectoriel réel

Définition 1

Un produit scalaire sur E est une *forme bilinéaire symétrique définie positive* i.e. une application : $E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \longmapsto (x | y)$$

1 Définitions

Espace vectoriel réel

Définition 1

Un produit scalaire sur E est une *forme bilinéaire symétrique définie positive* i.e. une application : $E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \longmapsto (x | y)$$

- *Bilinéaire.* Pour tous $x, x', y, y' \in E$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Définition 1

Un produit scalaire sur E est une *forme bilinéaire symétrique définie positive* i.e. une application : $E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \longmapsto (x | y)$$

- *Bilinéaire.* Pour tous $x, x', y, y' \in E$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
 - $(\lambda x + \mu x' | y) = \lambda (x | y) + \mu (x' | y)$

1 Définitions

Espace vectoriel réel

Définition 1

Un produit scalaire sur E est une *forme bilinéaire symétrique définie positive* i.e. une application : $E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \longmapsto (x | y)$$

- *Bilinéaire.* Pour tous $x, x', y, y' \in E$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
 - $(\lambda x + \mu x' | y) = \lambda (x | y) + \mu (x' | y)$
 - $(x | \lambda y + \mu y') = \lambda (x | y) + \mu (x | y')$

Définition 1

Un produit scalaire sur E est une *forme bilinéaire symétrique définie positive* i.e. une application : $E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \longmapsto (x | y)$$

- *Bilinéaire.* Pour tous $x, x', y, y' \in E$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
 - $(\lambda x + \mu x' | y) = \lambda (x | y) + \mu (x' | y)$
 - $(x | \lambda y + \mu y') = \lambda (x | y) + \mu (x | y')$
- *Symétrique.*

1 Définitions

Espace vectoriel réel

Définition 1

Un produit scalaire sur E est une *forme bilinéaire symétrique définie positive* i.e. une application : $E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \longmapsto (x | y)$$

- *Bilinéaire.* Pour tous $x, x', y, y' \in E$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
 - $(\lambda x + \mu x' | y) = \lambda (x | y) + \mu (x' | y)$
 - $(x | \lambda y + \mu y') = \lambda (x | y) + \mu (x | y')$
- *Symétrique.* $\forall x, y \in E, \quad (x | y) = (y | x).$

1 Définitions

Espace vectoriel réel

Définition 1

Un produit scalaire sur E est une *forme bilinéaire symétrique définie positive* i.e. une application : $E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \longmapsto (x | y)$$

- *Bilinéaire.* Pour tous $x, x', y, y' \in E$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
 - $(\lambda x + \mu x' | y) = \lambda (x | y) + \mu (x' | y)$
 - $(x | \lambda y + \mu y') = \lambda (x | y) + \mu (x | y')$
- *Symétrique.* $\forall x, y \in E, \quad (x | y) = (y | x).$
- *Définie positive :*
 -
 -

1 Définitions

Espace vectoriel réel

Définition 1

Un produit scalaire sur E est une *forme bilinéaire symétrique définie positive* i.e. une application : $E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \longmapsto (x | y)$$

- *Bilinéaire.* Pour tous $x, x', y, y' \in E$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
 - $(\lambda x + \mu x' | y) = \lambda (x | y) + \mu (x' | y)$
 - $(x | \lambda y + \mu y') = \lambda (x | y) + \mu (x | y')$
- *Symétrique.* $\forall x, y \in E, \quad (x | y) = (y | x).$
- *Définie positive :*
 - $\forall x \in E, \quad (x | x) \geq 0.$

▪

1 Définitions

Espace vectoriel réel

Définition 1

Un produit scalaire sur E est une *forme bilinéaire symétrique définie positive* i.e. une application : $E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \longmapsto (x | y)$$

- *Bilinéaire.* Pour tous $x, x', y, y' \in E$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
 - $(\lambda x + \mu x' | y) = \lambda (x | y) + \mu (x' | y)$
 - $(x | \lambda y + \mu y') = \lambda (x | y) + \mu (x | y')$
- *Symétrique.* $\forall x, y \in E, \quad (x | y) = (y | x).$
- *Définie positive :*
 - $\forall x \in E, \quad (x | x) \geq 0.$
 - Pour tout $x \in E$, si $(x | x) = 0$ alors $x = 0$

1 Définitions

Espace vectoriel réel

Définition 1

Un produit scalaire sur E est une *forme bilinéaire symétrique définie positive* i.e. une application : $E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \longmapsto (x | y)$$

aussi noté
 $\langle x|y \rangle$ ou $x \cdot y$

- *Bilinéaire.* Pour tous $x, x', y, y' \in E$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
 - $(\lambda x + \mu x' | y) = \lambda (x | y) + \mu (x' | y)$
 - $(x | \lambda y + \mu y') = \lambda (x | y) + \mu (x | y')$
- *Symétrique.* $\forall x, y \in E, \quad (x | y) = (y | x).$
- *Définie positive :*
 - $\forall x \in E, \quad (x | x) \geq 0.$
 - Pour tout $x \in E$, si $(x | x) = 0$ alors $x = 0$

1 Définitions

Espace préhilbertien réel

Définition 1

Un produit scalaire sur E est une *forme bilinéaire symétrique définie positive* i.e. une application : $E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \longmapsto (x | y)$$

aussi noté
 $\langle x|y \rangle$ ou $x \cdot y$

- *Bilinéaire.* Pour tous $x, x', y, y' \in E$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
 - $(\lambda x + \mu x' | y) = \lambda (x | y) + \mu (x' | y)$
 - $(x | \lambda y + \mu y') = \lambda (x | y) + \mu (x | y')$
- *Symétrique.* $\forall x, y \in E, \quad (x | y) = (y | x).$
- *Définie positive :*
 - $\forall x \in E, \quad (x | x) \geq 0.$
 - Pour tout $x \in E$, si $(x | x) = 0$ alors $x = 0$

1 Définitions

Espace préhilbertien réel
euclidien si de dim. finie

Définition 1

Un produit scalaire sur E est une *forme bilinéaire symétrique définie positive* i.e. une application : $E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \longmapsto (x | y)$$

aussi noté
 $\langle x|y \rangle$ ou $x \cdot y$

- *Bilinéaire.* Pour tous $x, x', y, y' \in E$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
 - $(\lambda x + \mu x' | y) = \lambda (x | y) + \mu (x' | y)$
 - $(x | \lambda y + \mu y') = \lambda (x | y) + \mu (x | y')$
- *Symétrique.* $\forall x, y \in E, \quad (x | y) = (y | x).$
- *Définie positive :*
 - $\forall x \in E, \quad (x | x) \geq 0.$
 - Pour tout $x \in E$, si $(x | x) = 0$ alors $x = 0$

1 Définitions

Espace préhilbertien réel
euclidien si de dim. finie

Définition 1

Un produit scalaire sur E est une *forme bilinéaire symétrique définie positive* i.e. une application : $E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \longmapsto (x | y)$$

aussi noté
 $\langle x|y \rangle$ ou $x \cdot y$

- *Bilinéaire.* Pour tous $x, x', y, y' \in E$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
 - $(\lambda x + \mu x' | y) = \lambda (x | y) + \mu (x' | y)$
 - $(x | \lambda y + \mu y') = \lambda (x | y) + \mu (x | y')$
- *Symétrique.* $\forall x, y \in E, \quad (x | y) = (y | x).$
- *Définie positive :*
 - $\forall x \in E, \quad (x | x) \geq 0.$
 - Pour tout $x \in E$, si $(x | x) = 0$ alors $x = 0$

Remarque

La bilinéarité assure que :

1 Définitions

Espace préhilbertien réel
euclidien si de dim. finie

Définition 1

Un produit scalaire sur E est une *forme bilinéaire symétrique définie positive* i.e. une application : $E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \longmapsto (x | y)$$

aussi noté
 $\langle x|y \rangle$ ou $x \cdot y$

- *Bilinéaire.* Pour tous $x, x', y, y' \in E$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
 - $(\lambda x + \mu x' | y) = \lambda (x | y) + \mu (x' | y)$
 - $(x | \lambda y + \mu y') = \lambda (x | y) + \mu (x | y')$
- *Symétrique.* $\forall x, y \in E, \quad (x | y) = (y | x).$
- *Définie positive :*
 - $\forall x \in E, \quad (x | x) \geq 0.$
 - Pour tout $x \in E$, si $(x | x) = 0$ alors $x = 0$

Remarque

La bilinéarité assure que : $\forall x \in E, \quad (x | 0_E) = (0_E | x) = 0$

2 Exemples de référence

Remarque

La bilinéarité assure que : $\forall x \in E, \quad (x \mid 0) = (0 \mid x) = 0$

Rappel

Produit scalaire de $\mathbb{R}^2$: $\vec{u} \cdot \vec{v}$

2 Exemples de référence

Remarque

La bilinéarité assure que : $\forall x \in E, \quad (x \mid 0) = (0 \mid x) = 0$

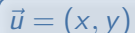
Rappel

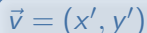
Produit scalaire de $\mathbb{R}^2$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

2 Exemples de référence

Remarque

La bilinéarité assure que : $\forall x \in E, (x \mid 0) = (0 \mid x) = 0$


$$\vec{u} = (x, y)$$


$$\vec{v} = (x', y')$$

Rappel

Produit scalaire de $\mathbb{R}^2$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

2 Exemples de référence

Remarque

La bilinéarité assure que : $\forall x \in E, (x | 0) = (0 | x) = 0$

$$\vec{u} = (x, y)$$

$$\vec{v} = (x', y')$$

Rappel

Produit scalaire de $\mathbb{R}^2$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

Exemple 1 : Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

Pour tous $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$: $(x | y) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{i=1}^n x_i y_i$

2 Exemples de référence

Exemple 2 : Produit scalaire intégral sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$

Pour tous $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$: $(f | g) = \int_a^b f(t)g(t) dt$

2 Exemples de référence

Exemple 3 : Produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

Pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$: $(A \mid B) = \text{tr}(A^\top B)$

2 Exemples de référence

Exemple 3 : Produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

Pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$: $(A \mid B) = \text{tr}(A^\top B) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{i,j} b_{i,j}$

2 Exemples de référence

Exercice 1

Soit $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ *distincts*. Montrer que

$$(P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 1

Soit E un espace préhilbertien.

Pour tous $x, y \in E$:

3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 1

Soit E un espace préhilbertien.

Pour tous $x, y \in E$: $(x | y)^2 \leq (x | x)(y | y)$

3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 1

Soit E un espace préhilbertien.

Pour tous $x, y \in E$: $(x | y)^2 \leq (x | x)(y | y)$
avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 1

Soit E un espace préhilbertien.

Pour tous $x, y \in E$: $(x | y)^2 \leq (x | x)(y | y)$
avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Exercice 2

Démontrer le théorème dans le cas où $y \neq 0$ en considérant la fonction $P : t \mapsto (x + ty | x + ty)$

3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 1

Soit E un espace préhilbertien.

Pour tous $x, y \in E$: $(x | y)^2 \leq (x | x)(y | y)$
avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

SF 4 : Utiliser Cauchy-Schwarz pour établir des inégalités

Exercice 3 : Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

Montrer que :

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2$$

Dans quels cas y-a-t-il égalité ?

3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 1

Soit E un espace préhilbertien.

Pour tous $x, y \in E$: $(x | y)^2 \leq (x | x)(y | y)$
avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

SF 4 : Utiliser Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)$$

égalité

Exercice 3 : Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

Montrer que :

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2$$

Dans quels cas y-a-t-il égalité ?

3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 1

Soit E un espace préhilbertien.

Pour tous $x, y \in E$: $(x | y)^2 \leq (x | x)(y | y)$
avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

SF 4 : Utiliser Cauchy-Schwarz pour établir des inégalités

Exercice 4 : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue.

Montrer :

$$\int_a^b f(t) dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt \geq (b - a)^2$$

3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 1

Soit E un espace préhilbertien.

Pour tous $x, y \in E$: $(x | y)^2 \leq (x | x)(y | y)$
avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

SF 4 : Utiliser

$$\left(\int_a^b g(t)h(t) dt \right)^2 \leq \left(\int_a^b g(t)^2 dt \right) \left(\int_a^b h(t)^2 dt \right)$$

Exercice 4 : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue.

Montrer :

$$\int_a^b f(t) dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt \geq (b - a)^2$$

3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 1

Soit E un espace préhilbertien.

Pour tous $x, y \in E$: $(x | y)^2 \leq (x | x)(y | y)$
avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Calculer : $\inf \left\{ \int_a^b f(t) dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt ; f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}_+^*) \right\}$

Exercice 4 : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue.

Montrer :

$$\int_a^b f(t) dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt \geq (b - a)^2$$

4 Norme associée à un produit scalaire

Définition 2

■ *norme* de x :

■

4 Norme associée à un produit scalaire

Définition 2

- *norme* de x : $\|x\| \stackrel{\text{déf.}}{=}$ ■

4 Norme associée à un produit scalaire

Définition 2

- *norme* de x : $\|x\| \underset{\text{déf.}}{=} \sqrt{(x | x)}$ ■

4 Norme associée à un produit scalaire

Définition 2

- *norme* de x : $\|x\| \stackrel{\text{déf.}}{=} \sqrt{(x | x)}$ ■

Unitaire si $\|x\| = 1$

4 Norme associée à un produit scalaire

Définition 2

- *norme* de x : $\|x\| \stackrel{\text{déf.}}{=} \sqrt{(x | x)}$
- *distance* de x à y :

Unitaire si $\|x\| = 1$

4 Norme associée à un produit scalaire

Définition 2

- *norme* de x : $\|x\| \stackrel{\text{déf.}}{=} \sqrt{(x|x)}$
- *distance* de x à y : $\|x - y\|$

Unitaire si $\|x\| = 1$

4 Norme associée à un produit scalaire

Définition 2

- *norme* de x : $\|x\| \stackrel{\text{déf.}}{=} \sqrt{(x | x)}$
- *distance* de x à y : $\|x - y\|$

Produit scalaire et normes

- $\|x\|^2 = (x | x)$

4 Norme associée à un produit scalaire

Définition 2

- *norme* de x : $\|x\| \stackrel{\text{déf.}}{=} \sqrt{(x | x)}$
- *distance* de x à y : $\|x - y\|$

Produit scalaire et normes

- $\|x\|^2 = (x | x)$
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$: $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

4 Norme associée à un produit scalaire

Définition 2

- *norme* de x : $\|x\| \stackrel{\text{déf.}}{=} \sqrt{(x | x)}$
- *distance* de x à y : $\|x - y\|$

Produit scalaire et normes

- $\|x\|^2 = (x | x)$
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$: $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- *Inégalité de Cauchy-Schwarz* :

4 Norme associée à un produit scalaire

Définition 2

- *norme* de x : $\|x\| \stackrel{\text{déf.}}{=} \sqrt{(x | x)}$
- *distance* de x à y : $\|x - y\|$

Produit scalaire et normes

- $\|x\|^2 = (x | x)$
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$: $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- *Inégalité de Cauchy-Schwarz* : $|(x | y)| \leq \|x\| \|y\|$

4 Norme associée à un produit scalaire

Définition 2

- *norme* de x : $\|x\| \stackrel{\text{déf.}}{=} \sqrt{(x | x)}$
- *distance* de x à y : $\|x - y\|$

Produit scalaire et normes

- $\|x\|^2 = (x | x)$
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$: $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- *Inégalité de Cauchy-Schwarz* : $|(x | y)| \leq \|x\| \|y\|$
- *Identités remarquables* :

4 Norme associée à un produit scalaire

Définition 2

- *norme* de x : $\|x\| \stackrel{\text{déf.}}{=} \sqrt{(x | x)}$
- *distance* de x à y : $\|x - y\|$

Produit scalaire et normes

- $\|x\|^2 = (x | x)$
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$: $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- *Inégalité de Cauchy-Schwarz* : $|(x | y)| \leq \|x\| \|y\|$
- *Identités remarquables* :
 - $\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \pm 2(x | y)$

4 Norme associée à un produit scalaire

Définition 2

- *norme* de x : $\|x\| \stackrel{\text{déf.}}{=} \sqrt{(x | x)}$
- *distance* de x à y : $\|x - y\|$

Produit scalaire et normes

- $\|x\|^2 = (x | x)$
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$: $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- *Inégalité de Cauchy-Schwarz* : $|(x | y)| \leq \|x\| \|y\|$
- *Identités remarquables* :
 - $\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \pm 2(x | y)$
 - $\|x\|^2 - \|y\|^2 = (x + y | x - y)$

4 Norme associée à un produit scalaire

Définition 2

- *norme* de x : $\|x\| \stackrel{\text{déf.}}{=} \sqrt{(x | x)}$
- *distance* de x à y : $\|x - y\|$

Produit scalaire et normes

- $\|x\|^2 = (x | x)$
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$: $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- *Inégalité de Cauchy-Schwarz* : $|(x | y)| \leq \|x\| \|y\|$
- *Identités remarquables* :
 - $\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \pm 2(x | y)$
 - $\|x\|^2 - \|y\|^2 = (x + y | x - y)$
- *Formule de polarisation* :

4 Norme associée à un produit scalaire

Définition 2

- *norme* de x : $\|x\| \stackrel{\text{déf.}}{=} \sqrt{(x | x)}$
- *distance* de x à y : $\|x - y\|$

Produit scalaire et normes

- $\|x\|^2 = (x | x)$
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$: $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- *Inégalité de Cauchy-Schwarz* : $|(x | y)| \leq \|x\| \|y\|$
- *Identités remarquables* :
 - $\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \pm 2(x | y)$
 - $\|x\|^2 - \|y\|^2 = (x + y | x - y)$
- *Formule de polarisation* : $(x | y) = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$

4 Norme associée à un produit scalaire

Définition 2

- *norme* de x : $\|x\| \underset{\text{déf.}}{=} \sqrt{(x | x)}$
- *distance* de x à y : $\|x - y\|$

Exercice 5 : Inégalité triangulaire

Montrer que pour $x, y \in E$ non-nuls : $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
Montrer qu'il y a égalité ssi x et y sont colinéaires de même sens.

4 Norme associée à un produit scalaire

Définition 2

- *norme* de x : $\|x\| \stackrel{\text{déf.}}{=} \sqrt{(x | x)}$
- *distance* de x à y : $\|x - y\|$

Exemple 4 : Sur $\mathbb{R}[X]$: $(P | Q) = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$

- Calculer : $\|X^n\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- Calculer la distance de X^2 à 1

4 Norme associée à un produit scalaire

Définition 2

- *norme* de x : $\|x\| \underset{\text{déf.}}{=} \sqrt{(x|x)}$
- *distance* de x à y : $\|x - y\|$

Exemple 5 : Dans $\mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$

On considère les fonctions $f_1 : t \mapsto \cos t$ et $f_2 : t \mapsto \sin t$

- Calculer : $\|f_1\|$ et $\|f_2\|$
- Calculer la distance de f_1 à f_2 .

II Orthogonalité dans un espace préhilbertien

I Produit scalaire

II Orthogonalité dans un espace préhilbertien

III Projection orthogonale sur un sous-espace

IV Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

1 Vecteurs orthogonaux

Espace préhibertien

Définition 1

Deux vecteurs $x, y \in E$ sont dits *orthogonaux* lorsque :

1 Vecteurs orthogonaux

Espace préhibertien

Définition 1

Deux vecteurs $x, y \in E$ sont dits *orthogonaux* lorsque : $(x | y) = 0$

1 Vecteurs orthogonaux

Espace préhibertien

On note $x \perp y$

Définition 1

Deux vecteurs $x, y \in E$ sont dits *orthogonaux* lorsque : $(x | y) = 0$

1 Vecteurs orthogonaux

Espace préhibertien

On note $x \perp y$

Définition 1

Deux vecteurs $x, y \in E$ sont dits *orthogonaux* lorsque : $(x | y) = 0$

Exemple 1 : Dans $E = \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$

1. Montrer que $f : t \mapsto \cos t$ et $g : t \mapsto \sin t$ sont orthogonales

1 Vecteurs orthogonaux

Espace préhilbertien

On note $x \perp y$

Définition 1

Deux vecteurs $x, y \in E$ sont dits *orthogonaux* lorsque : $(x | y) = 0$

Exemple 1 : Dans $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

2. Montrer que $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ sont orthogonales.

1 Vecteurs orthogonaux

Théorème 1 : Théorème de Pythagore

$x, y \in E$ sont orthogonaux ssi :

1 Vecteurs orthogonaux

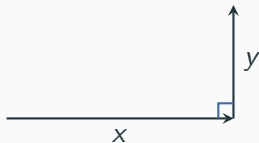
Théorème 1 : Théorème de Pythagore

$x, y \in E$ sont orthogonaux ssi : $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

1 Vecteurs orthogonaux

Théorème 1 : Théorème de Pythagore

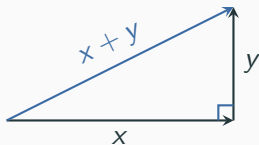
$x, y \in E$ sont orthogonaux ssi : $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$



1 Vecteurs orthogonaux

Théorème 1 : Théorème de Pythagore

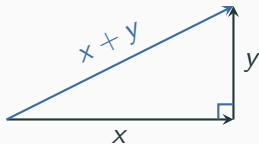
$x, y \in E$ sont orthogonaux ssi : $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$



1 Vecteurs orthogonaux

Théorème 1 : Théorème de Pythagore

$x, y \in E$ sont orthogonaux ssi : $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$



Exercice 1

Démontrer l'équivalence à l'aide d'une identité remarquable.

1 Vecteurs orthogonaux

Définition 2

Une famille $(u_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est dite :

- Orthogonale si :
- Orthonormale si :

1 Vecteurs orthogonaux

Définition 2

Une famille $(u_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est dite :

- Orthogonale si : $(u_i | u_j) = 0$ pour tous $i \neq j$.
- Orthonormale si :

1 Vecteurs orthogonaux

Définition 2

Une famille $(u_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est dite :

- Orthogonale si : $(u_i | u_j) = 0$ pour tous $i \neq j$.
- Orthonormale si : de plus, $\|u_i\| = 1$ pour tout $i \in I$

1 Vecteurs orthogonaux

$$\text{i.e. si pour tous } i, j \in I : (u_i | u_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Définition 2

Une famille $(u_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est dite :

- Orthogonale si : $(u_i | u_j) = 0$ pour tous $i \neq j$.
- Orthonormale si : de plus, $\|u_i\| = 1$ pour tout $i \in I$

1 Vecteurs orthogonaux

$$\text{i.e. si pour tous } i, j \in I : (u_i | u_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Définition 2

Une famille $(u_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est dite :

- Orthogonale si : $(u_i | u_j) = 0$ pour tous $i \neq j$.
- Orthonormale si : de plus, $\|u_i\| = 1$ pour tout $i \in I$

Exemple 2

Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, la base canonique $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est orthonormale.

1 Vecteurs orthogonaux

$$\text{i.e. si pour tous } i, j \in I : (u_i | u_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Définition 2

Une famille $(u_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est dite :

- Orthogonale si : $(u_i | u_j) = 0$ pour tous $i \neq j$.
- Orthonormale si : de plus, $\|u_i\| = 1$ pour tout $i \in I$

Exemple 3 : Dans $\mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$: $(f | g) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n : t \mapsto \sin(nt)$$

Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est orthonormale

1 Vecteurs orthogonaux

$$\text{i.e. si pour tous } i, j \in I : (u_i | u_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Définition 2

Une famille $(u_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est dite :

- Orthogonale si : $(u_i | u_j) = 0$ pour tous $i \neq j$.
- Orthonormale si : de plus, $\|u_i\| = 1$ pour tout $i \in I$

Exemple 4 : Soit $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ***distincts***

Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ pour

$$(P, Q) \longmapsto \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$$

1 Vecteurs orthogonaux

Théorème 2 : (Pythagore)

Si $(u_1, \dots, u_p)$ est orthogonale, alors :

1 Vecteurs orthogonaux

Théorème 2 : (Pythagore)

Si $(u_1, \dots, u_p)$ est orthogonale, alors :

$$\left\| \sum_{i=1}^p u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|u_i\|^2$$

1 Vecteurs orthogonaux

Théorème 2 : (Pythagore)

Si $(u_1, \dots, u_p)$ est orthogonale, alors :
$$\left\| \sum_{i=1}^p u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|u_i\|^2$$

1 Vecteurs orthogonaux

Théorème 2 : (Pythagore)

Si $(u_1, \dots, u_p)$ est orthogonale, alors :
$$\left\| \sum_{i=1}^p u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|u_i\|^2$$

Exercice 2

Démontrer cette égalité.

1 Vecteurs orthogonaux

Théorème 2 : (Pythagore)

Si $(u_1, \dots, u_p)$ est orthogonale, alors :
$$\left\| \sum_{i=1}^p u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|u_i\|^2$$

Exercice 2

Démontrer cette égalité.

Théorème 3

Toute famille orthogonale de vecteurs non-nuls est :

1 Vecteurs orthogonaux

Théorème 2 : (Pythagore)

Si $(u_1, \dots, u_p)$ est orthogonale, alors :
$$\left\| \sum_{i=1}^p u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|u_i\|^2$$

Exercice 2

Démontrer cette égalité.

Théorème 3

Toute famille orthogonale de vecteurs non-nuls est : libre

1 Vecteurs orthogonaux

Théorème 2 : (Pythagore)

Si $(u_1, \dots, u_p)$ est orthogonale, alors : $\left\| \sum_{i=1}^p u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|u_i\|^2$

Exercice 2

Démontrer cette égalité.

En particulier
toute famille orthonormée est libre

Théorème 3

Toute famille orthogonale de vecteurs non-nuls est : libre

1 Vecteurs orthogonaux

Théorème 2 : (Pythagore)

Si $(u_1, \dots, u_p)$ est orthogonale, alors :
$$\left\| \sum_{i=1}^p u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|u_i\|^2$$

Exercice 2

Démontrer cette égalité.

En particulier
toute famille orthonormée est libre

Théorème 3

Toute famille orthogonale de vecteurs non-nuls est : libre

Exercice 3

Démontrer le théorème.

2 Coordonnées dans une base orthonormale

Cadre

- E est euclidien muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.
 - $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ ▪ $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$

Exercice 4 : Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

a) $x_i = (x \mid e_i)$ b) $(x \mid y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ c) $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$

2 Coordonnées dans une base orthonormale

En base orthonormée :

$$x = \sum_{i=1}^n (x | e_i) e_i$$

Cadre

- E est euclidien muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

- $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ ▪ $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$

Exercice 4 : Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

a) $x_i = (x | e_i)$ b) $(x | y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ c) $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$

2 Coordonnées dans une base orthonormale

En base orthonormée :

$$x = \sum_{i=1}^n (x | e_i) e_i$$

Cadre

- E est euclidien muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

- $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ ▪ $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$

Exercice 4 : Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

a) $x_i = (x | e_i)$ b) $(x | y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ c) $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$

Remarque

Si X et Y sont les colonnes des coordonnées des vecteurs x et y :

2 Coordonnées dans une base orthonormale

En base orthonormée :

$$x = \sum_{i=1}^n (x | e_i) e_i$$

Cadre

- E est euclidien muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

- $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ ▪ $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$

Exercice 4 : Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

b) $(x | y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

c) $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$

Remarque

Si X et Y sont les colonnes des coordonnées des vecteurs x et y :

- $(x | y) =$

- $\|x\|^2 =$

2 Coordonnées dans une base orthonormale

En base orthonormée :

$$x = \sum_{i=1}^n (x | e_i) e_i$$

Cadre

- E est euclidien muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

- $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ ▪ $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$

Exercice 4 : Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

b) $(x | y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

c) $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$

Remarque

Si X et Y sont les colonnes des coordonnées des vecteurs x et y :

- $(x | y) = X^T Y$

- $\|x\|^2 =$

2 Coordonnées dans une base orthonormale

En base orthonormée :

$$x = \sum_{i=1}^n (x | e_i) e_i$$

Cadre

- E est euclidien muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

- $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ ▪ $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$

Exercice 4 : Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

b) $(x | y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ c) $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$

Remarque

Si X et Y sont les colonnes des coordonnées des vecteurs x et y :

- $(x | y) = X^T Y$ ▪ $\|x\|^2 = X^T X$

2 Coordonnées dans une base orthonormale

En base orthonormée :

$$x = \sum_{i=1}^n (x | e_i) e_i$$

Cadre

- E est euclidien muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

- $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ ▪ $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$

Exercice 4 : Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

b) $(x | y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ c) $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$

Remarque

Si X et Y sont les colonnes des coordonnées des vecteurs x et y :

- $(x | y) = X^T Y$ ▪ $\|x\|^2 = X^T X$

Exercice 5 : $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}} f$ où $f \in \mathcal{L}(E)$

Montrer que pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$a_{i,j} = (f(e_j) | e_i)$$

3 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace

Définition 3

Soit A une partie de E . L'orthogonal de A est l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de A

■ $A^\perp =$
déf.

3 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace

Définition 3

Soit A une partie de E . L'orthogonal de A est l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de A

$$\blacksquare \underset{\text{déf.}}{A^\perp} = \{x \in E \mid \forall a \in A, (x \mid a) = 0\}$$

3 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace

Définition 3

Soit A une partie de E . L'orthogonal de A est l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de A

- $A^\perp \underset{\text{déf.}}{=} \{x \in E \mid \forall a \in A, (x \mid a) = 0\}$
- $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E

3 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace

Définition 3

Soit A une partie de E . L'orthogonal de A est l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de A

- $A^\perp \stackrel{\text{déf.}}{=} \{x \in E \mid \forall a \in A, (x \mid a) = 0\}$
- $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E

Même si A
n'en est pas un

3 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace

Définition 3

Soit A une partie de E . L'orthogonal de A est l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de A

- $A^\perp \stackrel{\text{déf.}}{=} \{x \in E \mid \forall a \in A, (x \mid a) = 0\}$
- $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E

Même si A
n'en est pas un

Exemple 5

- a) $E^\perp =$ b) $\{0\}^\perp =$ c) $A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$

3 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace

Définition 3

Soit A une partie de E . L'orthogonal de A est l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de A

- $A^\perp \stackrel{\text{déf.}}{=} \{x \in E \mid \forall a \in A, (x \mid a) = 0\}$
- $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E

Même si A
n'en est pas un

Exemple 5

- a) $E^\perp = \{0\}$ b) $\{0\}^\perp =$ c) $A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$

3 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace

Définition 3

Soit A une partie de E . L'orthogonal de A est l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de A

- $A^\perp \underset{\text{déf.}}{=} \{x \in E \mid \forall a \in A, (x \mid a) = 0\}$
- $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E

Même si A
n'en est pas un

Exemple 5

- a) $E^\perp = \{0\}$ b) $\{0\}^\perp = E$ c) $A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$

3 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace

Définition 3

Soit A une partie de E . L'orthogonal de A est l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de A

- $A^\perp \stackrel{\text{déf.}}{=} \{x \in E \mid \forall a \in A, (x \mid a) = 0\}$
- $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E

Même si A
n'en est pas un

Exemple 5

- a) $E^\perp = \{0\}$ b) $\{0\}^\perp = E$ c) $A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$

Exercice 6

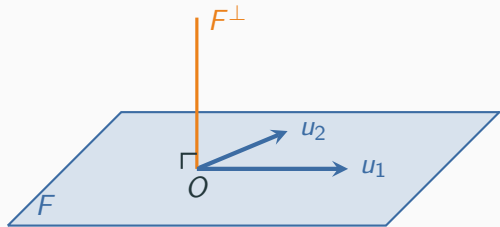
Démontrer que $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .

3 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace

SF 7 : Lorsque

$$F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$$

$$x \in F^\perp \iff \begin{cases} (x | u_1) = 0 \\ \dots \\ (x | u_p) = 0 \end{cases}$$

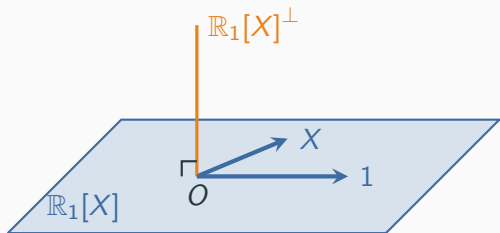


3 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace

SF 7 : Lorsque

$$F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$$

$$x \in F^\perp \iff \begin{cases} (x | u_1) = 0 \\ \dots \\ (x | u_p) = 0 \end{cases}$$



Exemple 6

1. Déterminer $\mathbb{R}_1[X]^\perp$ pour le produit scalaire défini sur $\mathbb{R}_2[X]$ par
$$(P|Q) = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$$

3 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace

SF 7 : Lorsque

$$F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$$

$$x \in F^\perp \iff \begin{cases} (x \mid u_1) = 0 \\ \dots \\ (x \mid u_p) = 0 \end{cases}$$

Exemple 6

2. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on note F l'ensemble des matrices diagonales. Déterminer $F^\perp$.

3 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace

Théorème 4

Soit F un sous-espace de dimension finie de E :

-
-

En conséquence, si E est de dimension finie :

3 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace

Théorème 4

Soit F un sous-espace de dimension finie de E :

$$\blacksquare E = F \oplus F^\perp \quad \blacksquare$$

En conséquence, si E est de dimension finie :

3 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace

Théorème 4

Soit F un sous-espace de dimension finie de E :

$$\blacksquare E = F \oplus F^\perp \qquad \blacksquare (F^\perp)^\perp = F$$

En conséquence, si E est de dimension finie :

3 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace

Théorème 4

Soit F un sous-espace de dimension finie de E :

$$\blacksquare E = F \oplus F^\perp \qquad \blacksquare (F^\perp)^\perp = F$$

En conséquence, si E est de dimension finie : $\dim F^\perp = n - \dim F$.

3 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace

Théorème 4

Soit F un sous-espace de dimension finie de E :

$$\blacksquare E = F \oplus F^\perp \qquad \blacksquare (F^\perp)^\perp = F$$

En conséquence, si E est de dimension finie : $\dim F^\perp = n - \dim F$.

Exercice 7

Démontrer le théorème.

III Projection orthogonale sur un sous-espace

I Produit scalaire

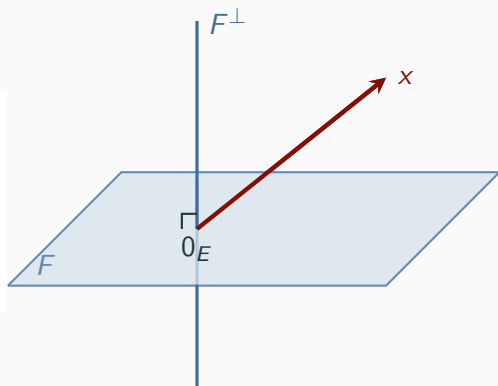
II Orthogonalité dans un espace préhilbertien

III Projection orthogonale sur un sous-espace

IV Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Cadre

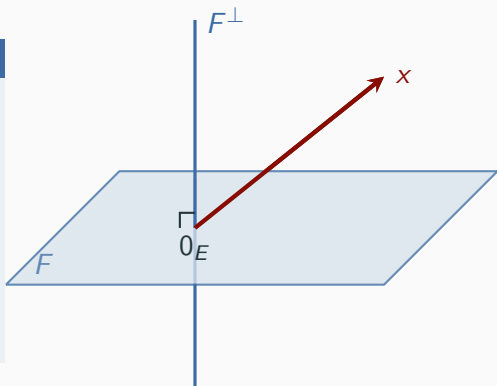
- E : espace préhilbertien
- F : sous-e.v. de dimension finie de E .
- On sait : $F \oplus F^\perp = E$.



1 Projection orthogonale sur un sous-espace

Définition 1

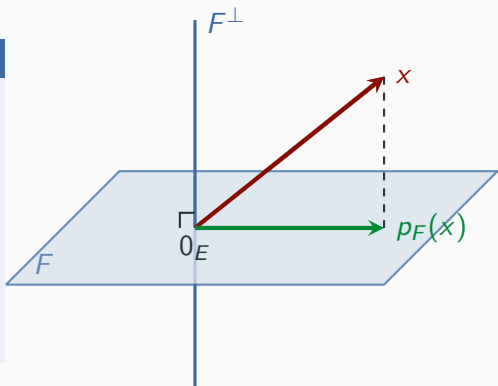
- *projecteur orthogonal sur F* : le projecteur



1 Projection orthogonale sur un sous-espace

Définition 1

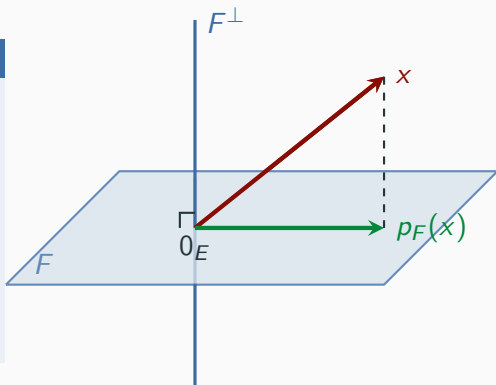
- *projecteur orthogonal sur F* : le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$.



1 Projection orthogonale sur un sous-espace

Définition 1

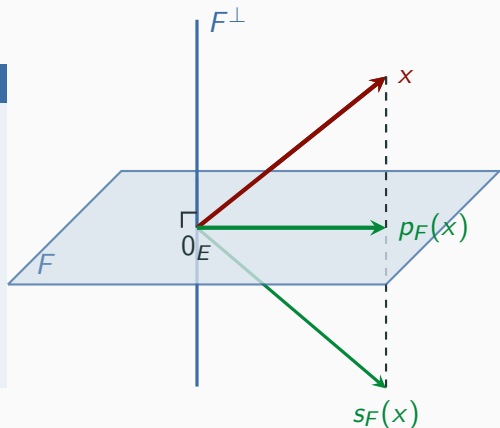
- *projecteur orthogonal sur F* : le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$.
- *symétrie orthogonale par rapport à F* : la symétrie



1 Projection orthogonale sur un sous-espace

Définition 1

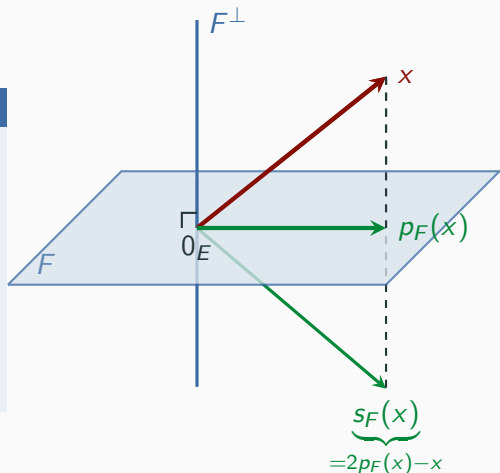
- *projecteur orthogonal sur F* : le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$.
- *symétrie orthogonale par rapport à F* : la symétrie par rapport à F , parallèlement à $F^\perp$.



1 Projection orthogonale sur un sous-espace

Définition 1

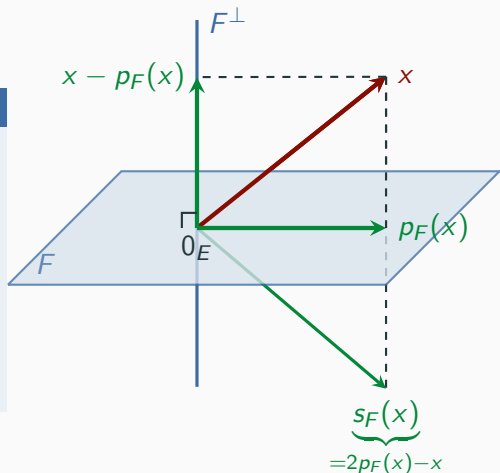
- *projecteur orthogonal sur F* : le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$.
- *symétrie orthogonale par rapport à F* : la symétrie par rapport à F , parallèlement à $F^\perp$.



1 Projection orthogonale sur un sous-espace

Définition 1

- *projecteur orthogonal sur F* : le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$.
- *symétrie orthogonale par rapport à F* : la symétrie par rapport à F , parallèlement à $F^\perp$.

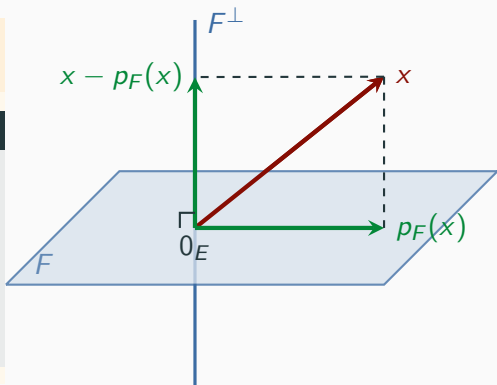


1 Projection orthogonale sur un sous-espace

**SF 9 : calculer le projeté –
méthode 1 : à vue**

Exercice 1

Calculer le projeté orthogonal
de : $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur le
sous-e.v. F des matrices
diagonales de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$



1 Projection orthogonale sur un sous-espace

Théorème 1 : Projeté en base orthonormée

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de F .

Pour tout $x \in E$:

1 Projection orthogonale sur un sous-espace

Théorème 1 : Projeté en base orthonormée

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de F .

Pour tout $x \in E$:
$$p_F(x) = \sum_{i=1}^p (x | e_i) e_i$$

1 Projection orthogonale sur un sous-espace

Théorème 1 : Projeté en base orthonormée

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de F .

Pour tout $x \in E$:
$$p_F(x) = \sum_{i=1}^p (x | e_i) e_i$$

Exercice 2

Démontrer la formule ci-dessus.

1 Projection orthogonale sur un sous-espace

Théorème 1 : Projeté en base orthonormée

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de F .

Pour tout $x \in E$:
$$p_F(x) = \sum_{i=1}^p (x \mid e_i) e_i$$

SF 9 : calculer le projeté – méthode 3 : en b.o.n.

Exemple 1 : $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0 \text{ et } z + t = 0\}$

Déterminer la matrice de p_F dans la base canonique.

1 Projection orthogonale sur un sous-espace

Théorème 1 : Projeté en base orthonormée

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de F .

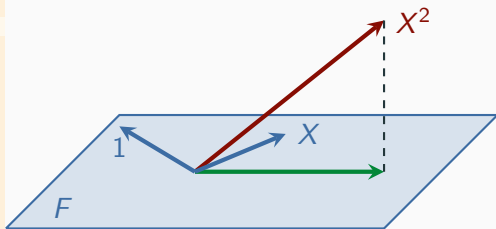
Pour tout $x \in E$:
$$p_F(x) = \sum_{i=1}^p (x | e_i) e_i$$

**SF 9 : calculer le projeté –
méthode 2 : en base qcq**

Exemple 2 : $F = \mathbb{R}_1[X]$

Calculer le projeté orthogonal
de X^2 sur F pour le produit
scalaire

$$(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t) dt$$



1 Projection orthogonale sur un sous-espace

Théorème 1 : Projeté en base orthonormée

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de F .

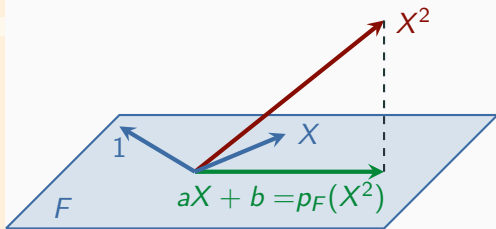
Pour tout $x \in E$:
$$p_F(x) = \sum_{i=1}^p (x | e_i) e_i$$

**SF 9 : calculer le projeté –
méthode 2 : en base qcq**

Exemple 2 : $F = \mathbb{R}_1[X]$

Calculer le projeté orthogonal de X^2 sur F pour le produit scalaire

$$(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t) dt$$



1 Projection orthogonale sur un sous-espace

Théorème 1 : Projeté en base orthonormée

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de F .

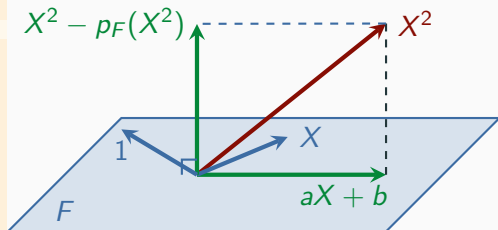
Pour tout $x \in E$:
$$p_F(x) = \sum_{i=1}^p (x | e_i) e_i$$

**SF 9 : calculer le projeté –
méthode 2 : en base qcq**

Exemple 2 : $F = \mathbb{R}_1[X]$

Calculer le projeté orthogonal
de X^2 sur F pour le produit
scalaire

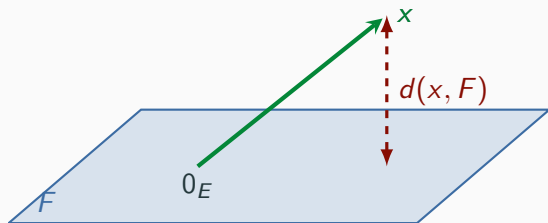
$$(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t) dt$$



2 Distance à un sous-espace

Définition 1

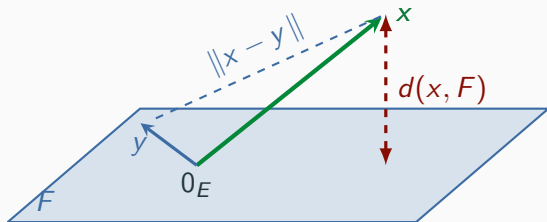
Pour $x \in E$, la *distance* de x à F est : $d(x, F) \stackrel{\text{déf.}}{=}$



2 Distance à un sous-espace

Définition 1

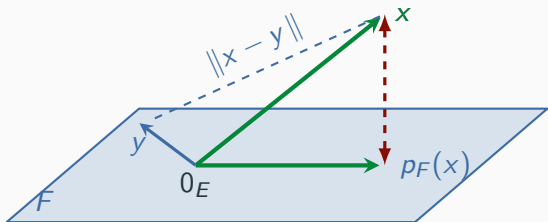
Pour $x \in E$, la distance de x à F est : $d(x, F) \stackrel{\text{déf.}}{=} \inf_{y \in F} \|x - y\|$



2 Distance à un sous-espace

Définition 1

Pour $x \in E$, la *distance* de x à F est : $d(x, F) \stackrel{\text{déf.}}{=} \inf_{y \in F} \|x - y\|$



Théorème 2

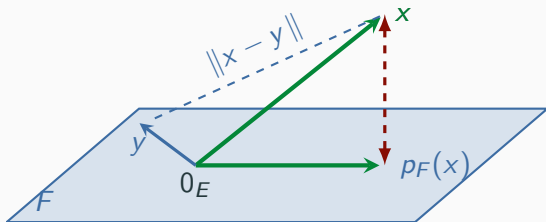
Soit $x \in E$ et $y \in F$. Si $y \neq p_F(x)$:

En particulier :

2 Distance à un sous-espace

Définition 1

Pour $x \in E$, la distance de x à F est : $d(x, F) \stackrel{\text{déf.}}{=} \inf_{y \in F} \|x - y\|$



Théorème 2

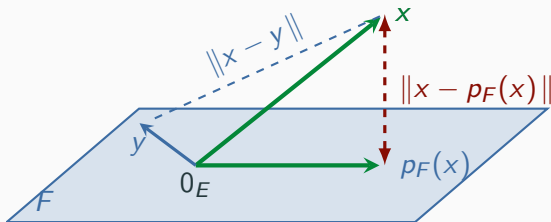
Soit $x \in E$ et $y \in F$. Si $y \neq p_F(x)$: $\|x - y\| > \|x - p_F(x)\|$

En particulier :

2 Distance à un sous-espace

Définition 1

Pour $x \in E$, la distance de x à F est : $d(x, F) \stackrel{\text{déf.}}{=} \inf_{y \in F} \|x - y\|$



Théorème 2

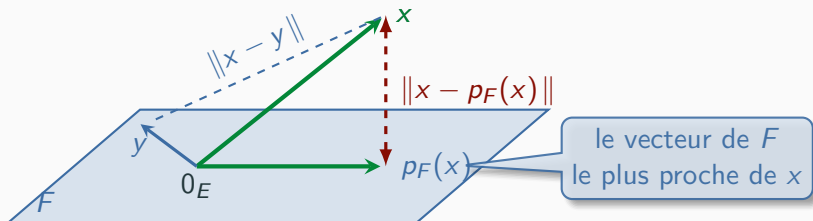
Soit $x \in E$ et $y \in F$. Si $y \neq p_F(x)$: $\|x - y\| > \|x - p_F(x)\|$

En particulier : $\|x - p_F(x)\| = d(x, F)$

2 Distance à un sous-espace

Définition 1

Pour $x \in E$, la distance de x à F est : $d(x, F) \stackrel{\text{déf.}}{=} \inf_{y \in F} \|x - y\|$



Théorème 2

Soit $x \in E$ et $y \in F$. Si $y \neq p_F(x)$: $\|x - y\| > \|x - p_F(x)\|$

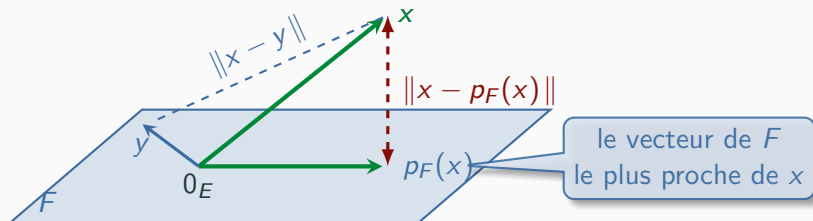
En particulier : $\|x - p_F(x)\| = d(x, F)$

2 Distance à un sous-espace

Théorème 2

Soit $x \in E$ et $y \in F$. Si $y \neq p_F(x)$: $\|x - y\| > \|x - p_F(x)\|$

En particulier : $\|x - p_F(x)\| = d(x, F)$



Exercice 3

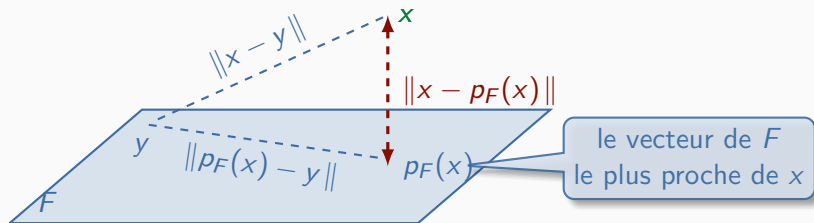
Démontrer le théorème.

2 Distance à un sous-espace

Théorème 2

Soit $x \in E$ et $y \in F$. Si $y \neq p_F(x)$: $\|x - y\| > \|x - p_F(x)\|$

En particulier : $\|x - p_F(x)\| = d(x, F)$



Exercice 3

Démontrer le théorème.

2 Distance à un sous-espace

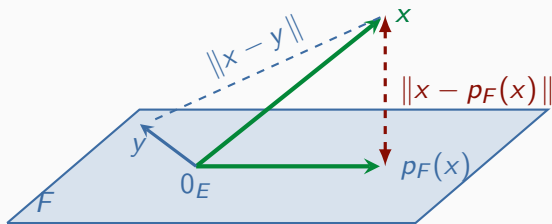
Exercice 4 : Application en analyse

Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ minimisant : $I(a, b) = \int_0^1 \left(t^2 - (at + b) \right)^2 dt$

2 Distance à un sous-espace

Exercice 4 : Application en analyse

Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ minimisant : $l(a, b) = \int_0^1 \left(t^2 - (at + b) \right)^2 dt$

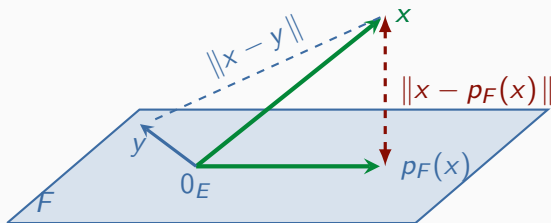


2 Distance à un sous-espace

« $\|x - y\|^2$ »

Exercice 4 : Application en analyse

Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ minimisant : $l(a, b) = \int_0^1 \left(t^2 - (at + b) \right)^2 dt$



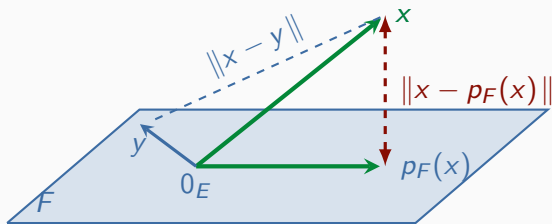
2 Distance à un sous-espace

« $\|x - y\|^2$ »

« $x \in E$ »

Exercice 4 : Application en analyse

Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ minimisant : $l(a, b) = \int_0^1 \left(t^2 - (at + b) \right)^2 dt$



2 Distance à un sous-espace

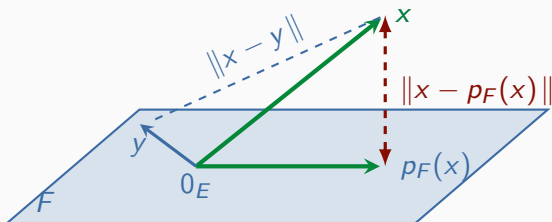
« $\|x - y\|^2$ »

« $x \in E$ »

« $y \in F$ »

Exercice 4 : Application en analyse

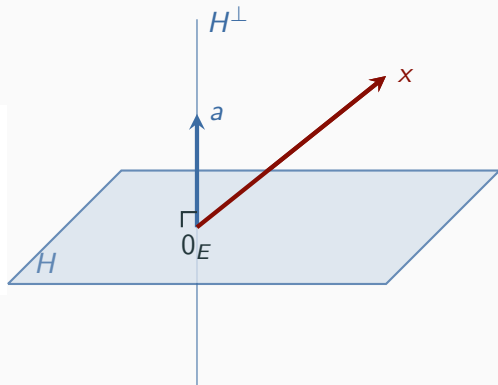
Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ minimisant : $l(a, b) = \int_0^1 \left(t^2 - (at + b) \right)^2 dt$



3 Cas des hyperplans

Cadre

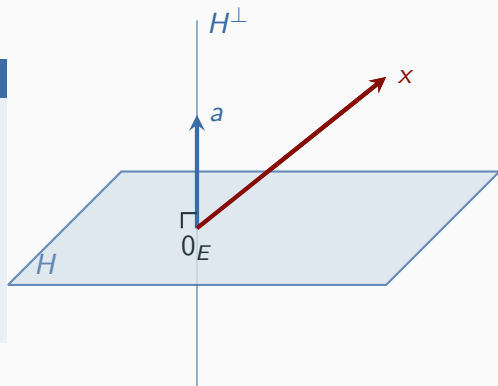
- E : espace euclidien
- H : hyperplan de E .
- $H^\perp = \text{Vect}(a)$.



3 Cas des hyperplans

Théorème 3

Soit $x \in E$. Soit a est un vecteur normal à H :

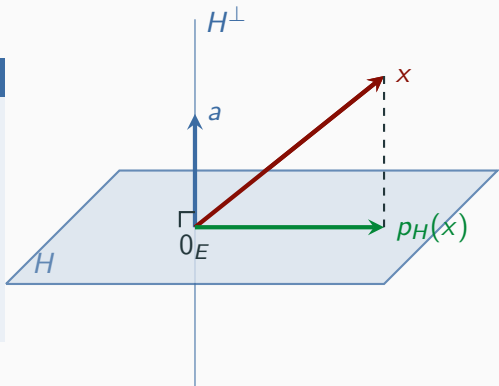


3 Cas des hyperplans

Théorème 3

Soit $x \in E$. Soit a est un vecteur normal à H :

- $$p_H(x) = x - \frac{(x | a)}{\|a\|^2} a$$

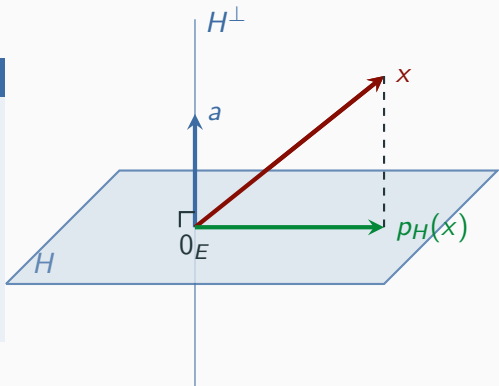


3 Cas des hyperplans

Théorème 3

Soit $x \in E$. Soit a est un vecteur normal à H :

- $p_H(x) = x - \frac{(x | a)}{\|a\|^2} a$
- $d(x, H) = \frac{|(x | a)|}{\|a\|}$

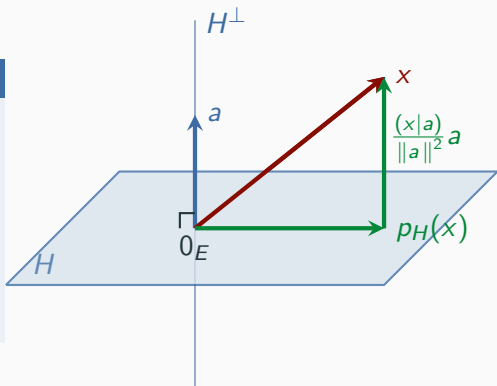


3 Cas des hyperplans

Théorème 3

Soit $x \in E$. Soit a est un vecteur normal à H :

- $p_H(x) = x - \frac{(x | a)}{\|a\|^2} a$
- $d(x, H) = \frac{|(x | a)|}{\|a\|}$



Exercice 5

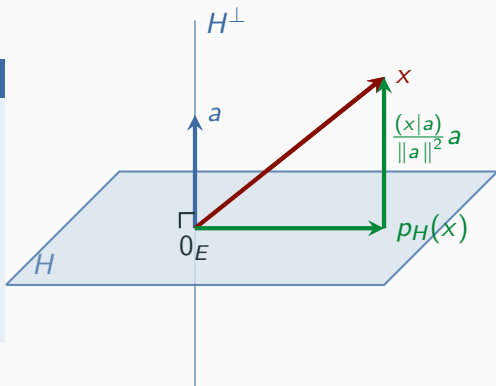
Démontrer ces deux formules.

3 Cas des hyperplans

Théorème 3

Soit $x \in E$. Soit a est un vecteur normal à H :

- $p_H(x) = x - \frac{(x | a)}{\|a\|^2} a$
- $d(x, H) = \frac{|(x | a)|}{\|a\|}$



Exemple 3 : $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0\}$

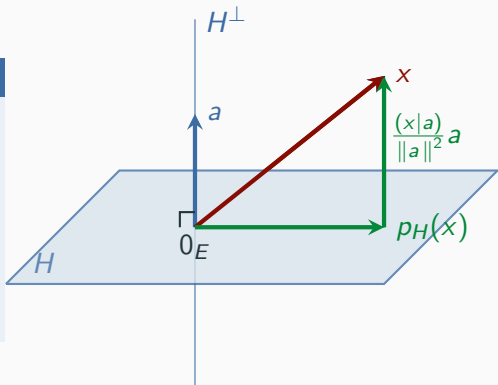
On pose : $\vec{u} = (2, 2, 1)$. Calculer : $d(\vec{u}, P)$

3 Cas des hyperplans

Théorème 3

Soit $x \in E$. Soit a est un vecteur normal à H :

- $p_H(x) = x - \frac{(x | a)}{\|a\|^2} a$
- $d(x, H) = \frac{|(x | a)|}{\|a\|}$



Exemple 4 : $\mathbb{R}_n[X]$ muni de $(P | Q) = \sum_{k=0}^n P(k)Q(k)$

Calculer $d(X^n, H)$ où : $H = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \sum_{k=0}^n P(k) = 0 \right\}$.

IV Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

I Produit scalaire

II Orthogonalité dans un espace préhilbertien

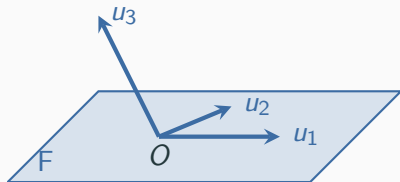
III Projection orthogonale sur un sous-espace

IV Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

1 La théorie

Cadre

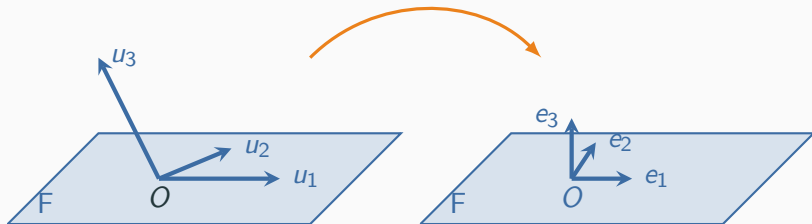
- $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille libre



1 La théorie

Cadre

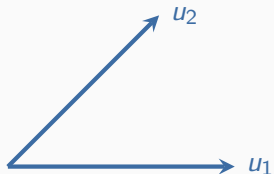
- $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille libre
- On veut la transformer en une famille orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$



1 La théorie

Construction de proche en proche des e_k

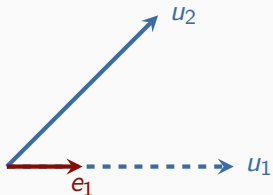
- $k = 1$:
- $k = 2$:



1 La théorie

Construction de proche en proche des e_k

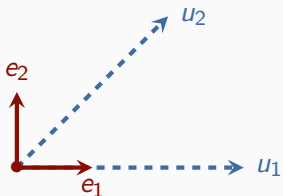
- $k = 1$: $e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$
- $k = 2$:



1 La théorie

Construction de proche en proche des e_k

■ $k = 1$: $e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$ ■ $k = 2$: $e_2 = \frac{u_2 - (u_2 | e_1) e_1}{\|u_2 - (u_2 | e_1) e_1\|}$



1 La théorie

Construction de proche en proche des e_k

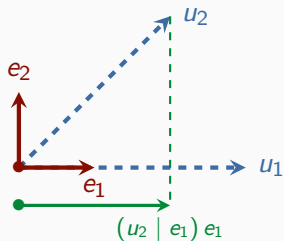
▪ $k = 1 :$
$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$$

▪ $k = 2 :$
$$e_2 = \frac{u_2 - (u_2 | e_1) e_1}{\|u_2 - (u_2 | e_1) e_1\|}$$

Plus généralement, pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket :$

▪

▪



1 La théorie

Construction de proche en proche des e_k

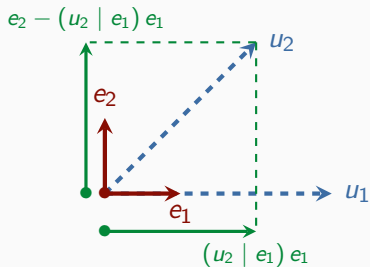
▪ $k = 1 :$
$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$$

▪ $k = 2 :$
$$e_2 = \frac{u_2 - (u_2 | e_1) e_1}{\|u_2 - (u_2 | e_1) e_1\|}$$

Plus généralement, pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket :$

▪

▪



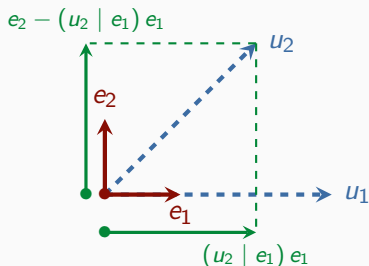
1 La théorie

Construction de proche en proche des e_k

$$\begin{array}{ll} \blacksquare k = 1 : & e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} \\ \blacksquare k = 2 : & e_2 = \frac{u_2 - (u_2 | e_1) e_1}{\|u_2 - (u_2 | e_1) e_1\|} \end{array}$$

Plus généralement, pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$:

$$\blacksquare \text{ on pose } \tilde{e}_k = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} (u_k | e_i) e_i \quad \blacksquare$$



1 La théorie

Construction de proche en proche des e_k

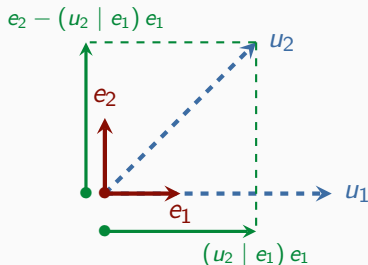
- $k = 1$: $e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$

- $k = 2$: $e_2 = \frac{u_2 - (u_2 | e_1) e_1}{\|u_2 - (u_2 | e_1) e_1\|}$

Plus généralement, pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$:

- on pose $\tilde{e}_k = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} (u_k | e_i) e_i$

- on normalise $e_k = \frac{\tilde{e}_k}{\|\tilde{e}_k\|}$



1 La théorie

Construction de proche en proche des e_k

$$\begin{array}{ll} \blacksquare k = 1 : & e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} \\ \blacksquare k = 2 : & e_2 = \frac{u_2 - (u_2 | e_1) e_1}{\|u_2 - (u_2 | e_1) e_1\|} \end{array}$$

Plus généralement, pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$:

$$\begin{array}{ll} \blacksquare \text{on pose} & \tilde{e}_k = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} (u_k | e_i) e_i \\ \blacksquare \text{on normalise} & e_k = \frac{\tilde{e}_k}{\|\tilde{e}_k\|} \end{array}$$

Théorème 1

$(e_1, \dots, e_n)$ orthonormée

1 La théorie

Construction de proche en proche des e_k

$$\begin{array}{ll} \blacksquare k = 1 : & e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} \\ \blacksquare k = 2 : & e_2 = \frac{u_2 - (u_2 | e_1) e_1}{\|u_2 - (u_2 | e_1) e_1\|} \end{array}$$

Plus généralement, pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$:

$$\begin{array}{ll} \blacksquare \text{on pose} & \tilde{e}_k = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} (u_k | e_i) e_i \\ \blacksquare \text{on normalise} & e_k = \frac{\tilde{e}_k}{\|\tilde{e}_k\|} \end{array}$$

Théorème 1

$(e_1, \dots, e_n)$ orthonormée et :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k).$$

Exercice 1 : Démontrer par récurrence

$\mathcal{P}_k$: « $(e_1, \dots, e_k)$ est une b.o.n. de $F_k = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ »

Théorème 2 : Bases orthonormées en dimension finie

On suppose que E est un espace euclidien non réduit à $\{0_E\}$.

Théorème 2 : Bases orthonormées en dimension finie

On suppose que E est un espace euclidien non réduit à $\{0_E\}$.

1. L'espace E possède des bases orthonormées.

Théorème 2 : Bases orthonormées en dimension finie

On suppose que E est un espace euclidien non réduit à $\{0_E\}$.

1. L'espace E possède des bases orthonormées.
2. Toute famille orthonormée de E est complétable en une base orthonormée.

1 La théorie

Théorème 2 : Bases orthonormées en dimension finie

On suppose que E est un espace euclidien non réduit à $\{0_E\}$.

1. L'espace E possède des bases orthonormées.
2. Toute famille orthonormée de E est complétable en une base orthonormée.

Exercice 2

Démontrer le théorème.

Exemple 1

1. Prouver que la relation $(P | Q) = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$ définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Orthonormaliser grâce à l'algorithme de Gram-Schmidt la famille $(1, X, X^2)$.
3. Calculer le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$.

3 Un exercice classique pour s'entraîner

Exercice 2 : Polynômes orthogonaux

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $(P | Q) = \int_{-1}^1 PQ \, dx$

1. Justifier que $(P, Q) \mapsto (P | Q)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Justifier qu'il existe une base orthonormée $(P_0, \dots, P_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket : \deg P_k = k$.
3. Calculer $(P_n | Q)$ pour $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
4. Montrer que P_n possède n racines distinctes dans $[-1, 1]$.
5. On note $x_1 < \dots < x_n$ les n racines distinctes de P_n . Montrer qu'il existe $\delta_1, \dots, \delta_n \in \mathbb{R}$ tels que :
$$\forall B \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_{-1}^1 B(t) \, dt = \sum_{i=1}^n \delta_i B(x_i).$$
6. Montrer : $\forall B \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \quad \int_{-1}^1 B(t) \, dt = \sum_{i=1}^n \delta_i B(x_i).$
7. Démontrer : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \delta_k \geq 0.$

3 Un exercice classique pour s'entraîner

Exercice 2 : Polynômes orthogonaux

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $(P | Q) = \int_{-1}^1 PQ \, dx$

1. Justifier que $(P, Q) \mapsto (P | Q)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Justifier qu'il existe une base orthonormée $(P_0, \dots, P_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket : \deg P_k = k$.
3. Calculer $(P_n | Q)$ pour $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
4. Montrer que P_n possède n racines distinctes dans $[-1, 1]$.
5. On note $x_1 < \dots < x_n$ les n racines distinctes de P_n . Montrer qu'il existe $\delta_1, \dots, \delta_n \in \mathbb{R}$ tels que :
$$\forall B \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_{-1}^1 B(t) \, dt = \sum_{i=1}^n \delta_i B(x_i).$$
6. Montrer : $\forall B \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \quad \int_{-1}^1 B(t) \, dt = \sum_{i=1}^n \delta_i B(x_i).$
7. Démontrer : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \delta_k \geq 0.$