

Familles de variables aléatoires

Chapitre 32

Dans tout le chapitre

- (Ω, P) est un espace probabilisé fini
- X, Y et $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires sur Ω .

I Variables aléatoires indépendantes, covariance

I Variables aléatoires indépendantes, covariance

II Loi d'un couple de variables aléatoires

III Compléments : inégalités probabilistes

1 Indépendance de variable aléatoires

Définition 1

X et Y sont dites indépendantes si les événements $\{X \in A\}$ et $\{Y \in B\}$ le sont pour tous $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$ ce qui équivaut à :

1 Indépendance de variable aléatoires

Définition 1

X et Y sont dites indépendantes si les événements $\{X \in A\}$ et $\{Y \in B\}$ le sont pour tous $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$ ce qui équivaut à :

$$\forall (i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), P(\{X=i\} \cap \{Y=j\}) = P(X=i)P(Y=j)$$

1 Indépendance de variable aléatoires

Définition 1

X et Y sont dites indépendantes si les événements $\{X \in A\}$ et $\{Y \in B\}$ le sont pour tous $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$ ce qui équivaut à :
 $\forall (i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), P(\{X=i\} \cap \{Y=j\}) = P(X=i)P(Y=j)$

Noté : $P(X=i, Y=j)$

1 Indépendance de variable aléatoires

Noté : $X \perp\!\!\!\perp Y$

Définition 1

X et Y sont dites indépendantes si les événements $\{X \in A\}$ et $\{Y \in B\}$ le sont pour tous $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$ ce qui équivaut à :
 $\forall (i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), P(\{X=i\} \cap \{Y=j\}) = P(X=i)P(Y=j)$

Noté : $P(X=i, Y=j)$

1 Indépendance de variable aléatoires

Noté : $X \perp\!\!\!\perp Y$

Définition 1

X et Y sont dites indépendantes si les événements $\{X \in A\}$ et $\{Y \in B\}$ le sont pour tous $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$ ce qui équivaut à :
 $\forall (i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), P(\{X=i\} \cap \{Y=j\}) = P(X=i)P(Y=j)$

Noté : $P(X=i, Y=j)$

Remarque

Si X et Y sont indépendantes :

- $P_{\{X \in A\}}(Y \in B) = P(Y \in B)$

1 Indépendance de variable aléatoires

Noté : $X \perp\!\!\!\perp Y$

Définition 1

X et Y sont dites indépendantes si les événements $\{X \in A\}$ et $\{Y \in B\}$ le sont pour tous $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$ ce qui équivaut à :
 $\forall (i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), P(\{X=i\} \cap \{Y=j\}) = P(X=i)P(Y=j)$

Noté : $P(X=i, Y=j)$

Remarque

Si X et Y sont indépendantes :

- $P_{\{X \in A\}}(Y \in B) = P(Y \in B)$
- $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes

1 Indépendance de variable aléatoires

Noté : $X \perp\!\!\!\perp Y$

Définition 1

X et Y sont dites indépendantes si les événements $\{X \in A\}$ et $\{Y \in B\}$ le sont pour tous $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$ ce qui équivaut à :
 $\forall (i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), P(\{X=i\} \cap \{Y=j\}) = P(X=i)P(Y=j)$

Noté : $P(X=i, Y=j)$

Remarque

Si X et Y sont indépendantes :

- $P_{\{X \in A\}}(Y \in B) = P(Y \in B)$
- $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes
- La définition se généralise à n variables aléatoires avec $n \geq 2$

1 Indépendance de variable aléatoires

Noté : $X \perp\!\!\!\perp Y$

Définition 1

X et Y sont dites indépendantes si les événements $\{X \in A\}$ et $\{Y \in B\}$ le sont pour tous $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$ ce qui équivaut à :
 $\forall (i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), P(\{X=i\} \cap \{Y=j\}) = P(X=i)P(Y=j)$

Noté : $P(X=i, Y=j)$

Lemme des coalitions

Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi.

1 Indépendance de variable aléatoires

Noté : $X \perp\!\!\!\perp Y$

Définition 1

X et Y sont dites indépendantes si les événements $\{X \in A\}$ et $\{Y \in B\}$ le sont pour tous $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$ ce qui équivaut à :
 $\forall (i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), P(\{X=i\} \cap \{Y=j\}) = P(X=i)P(Y=j)$

Noté : $P(X=i, Y=j)$

Exemple 1

Soient $X_1, \dots, X_n$ indépendantes des lois $\mathcal{B}(p_1), \dots, \mathcal{B}(p_n)$.
Trouver la loi de $Z = X_1 \dots X_n$

1 Indépendance de variable aléatoires

Noté : $X \perp\!\!\!\perp Y$

Définition 1

X et Y sont dites indépendantes si les événements $\{X \in A\}$ et $\{Y \in B\}$ le sont pour tous $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$ ce qui équivaut à :
 $\forall (i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), P(\{X=i\} \cap \{Y=j\}) = P(X=i)P(Y=j)$

Noté : $P(X=i, Y=j)$

Exemple 2

Soit $X \sim \mathcal{U}(\{-1, 1\})$ et $Y = \frac{1+X}{2}$.

Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes.

1 Indépendance de variable aléatoires

Noté : $X \perp\!\!\!\perp Y$

Définition 1

X et Y sont dites indépendantes si les événements $\{X \in A\}$ et $\{Y \in B\}$ le sont pour tous $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$ ce qui équivaut à :
 $\forall (i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), P(\{X=i\} \cap \{Y=j\}) = P(X=i)P(Y=j)$

Noté : $P(X=i, Y=j)$

Théorème 1

Si X et Y sont deux variables réelles (ou complexes) indépendantes :

1 Indépendance de variable aléatoires

Noté : $X \perp\!\!\!\perp Y$

Définition 1

X et Y sont dites indépendantes si les événements $\{X \in A\}$ et $\{Y \in B\}$ le sont pour tous $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$ ce qui équivaut à :
 $\forall (i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), P(\{X=i\} \cap \{Y=j\}) = P(X=i)P(Y=j)$

Noté : $P(X=i, Y=j)$

Théorème 1

Si X et Y sont deux variables réelles (ou complexes) indépendantes :

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

2 Somme de variables aléatoires indépendantes

Théorème 1

Si X et Y sont deux v.a. indépendantes : $E(XY) = E(X)E(Y)$

Exercice 1

Soient X et S deux variables aléatoires définies sur Ω . On suppose que X et S sont indépendantes et que $X \sim \mathcal{B}(p)$ et $S \sim \mathcal{B}(n, p)$. Montrer que la variable aléatoire $T = S + X$ suit la loi $\mathcal{B}(n + 1, p)$.

2 Somme de variables aléatoires indépendantes

Exercice 1

Soient X et S deux variables aléatoires définies sur Ω . On suppose que X et S sont indépendantes et que $X \sim \mathcal{B}(p)$ et $S \sim \mathcal{B}(n, p)$. Montrer que la variable aléatoire $T = S + X$ suit la loi $\mathcal{B}(n + 1, p)$.

Théorème 2

On suppose que $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et toutes de loi $\mathcal{B}(p)$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

2 Somme de variables aléatoires indépendantes

Exercice 1

Soient X et S deux variables aléatoires définies sur Ω . On suppose que X et S sont indépendantes et que $X \sim \mathcal{B}(p)$ et $S \sim \mathcal{B}(n, p)$. Montrer que la variable aléatoire $T = S + X$ suit la loi $\mathcal{B}(n + 1, p)$.

Théorème 2

On suppose que $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et toutes de loi $\mathcal{B}(p)$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

$$S_n \sim \mathcal{B}(n, p)$$

2 Somme de variables aléatoires indépendantes

Exercice 1

Soient X et S deux variables aléatoires définies sur Ω . On suppose que X et S sont indépendantes et que $X \sim \mathcal{B}(p)$ et $S \sim \mathcal{B}(n, p)$. Montrer que la variable aléatoire $T = S + X$ suit la loi $\mathcal{B}(n + 1, p)$.

Justifie l'interprétation :

Théorème 2 Loi binomiale = Compteur de succès

On suppose que $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et toutes de loi $\mathcal{B}(p)$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

$$S_n \sim \mathcal{B}(n, p)$$

2 Somme de variables aléatoires indépendantes

Exercice 1

Soient X et S deux variables aléatoires définies sur Ω . On suppose que X et S sont indépendantes et que $X \sim \mathcal{B}(p)$ et $S \sim \mathcal{B}(n, p)$. Montrer que la variable aléatoire $T = S + X$ suit la loi $\mathcal{B}(n + 1, p)$.

Justifie l'interprétation :

Théorème 2 Loi binomiale = Compteur de succès

On suppose que $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et toutes de loi $\mathcal{B}(p)$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

$$S_n \sim \mathcal{B}(n, p)$$

Exemple 3 : X et Y indépendantes de loi $\mathcal{U}([1, n])$

Etablir :
$$P(X + Y = k) = \begin{cases} \frac{k-1}{n^2} & \text{si } 2 \leq k \leq n \\ \frac{2n-k+1}{n^2} & \text{si } n+1 \leq k \leq 2n \end{cases}$$

2 Somme de variables aléatoires indépendantes

Exercice 2 : X et Y sont des variables aléatoires réelles

Montrer : $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2(E(XY) - E(X)E(Y))$

2 Somme de variables aléatoires indépendantes

Exercice 2 : X et Y sont des variables aléatoires réelles

Montrer : $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2(E(XY) - E(X)E(Y))$

Théorème 3 : Pythagore

Si X, Y sont deux v.a.r. indépendantes :

2 Somme de variables aléatoires indépendantes

Exercice 2 : X et Y sont des variables aléatoires réelles

Montrer : $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2(E(XY) - E(X)E(Y))$

Théorème 3 : Pythagore

Si X, Y sont deux v.a.r. indépendantes : $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

2 Somme de variables aléatoires indépendantes

Exercice 2 : X et Y sont des variables aléatoires réelles

Montrer : $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2(E(XY) - E(X)E(Y))$

Théorème 3 : Pythagore

Si X, Y sont deux v.a.r. indépendantes : $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

Remarque

Si $X_1, \dots, X_n$ sont des v.a.r. indépendantes :

2 Somme de variables aléatoires indépendantes

Exercice 2 : X et Y sont des variables aléatoires réelles

Montrer : $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2(E(XY) - E(X)E(Y))$

Théorème 3 : Pythagore

Si X, Y sont deux v.a.r. indépendantes : $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

Remarque

Si $X_1, \dots, X_n$ sont des v.a.r. indépendantes : $V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i)$

2 Somme de variables aléatoires indépendantes

Exercice 2 : X et Y sont des variables aléatoires réelles

Montrer : $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2(E(XY) - E(X)E(Y))$

Théorème 3 : Pythagore

Si X, Y sont deux v.a.r. indépendantes : $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

Remarque

Si $X_1, \dots, X_n$ sont des v.a.r. indépendantes : $V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i)$

Exercice 3

Démontrer la formule donnant la variance de la loi $\mathcal{B}(n, p)$ en appliquant les deux résultats précédents à $S_n = X_1 + \dots + X_n$ où les X_i sont indépendantes et toutes de loi $\mathcal{B}(p)$.

3 Covariance de deux variables aléatoires réelles X et Y

Définition 2

On appelle *covariance* de X et Y le réel

- $\text{cov}(X, Y) \underset{\text{déf.}}{=}$

- ou aussi : $\text{cov}(X, Y) =$

3 Covariance de deux variables aléatoires réelles X et Y

Définition 2

On appelle *covariance* de X et Y le réel

- $\text{cov}(X, Y) \underset{\text{déf.}}{=} E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right)$
- ou aussi : $\text{cov}(X, Y) =$

3 Covariance de deux variables aléatoires réelles X et Y

Définition 2

On appelle *covariance* de X et Y le réel

- $\text{cov}(X, Y) \underset{\text{déf.}}{=} E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right)$
- ou aussi : $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

3 Covariance de deux variables aléatoires réelles X et Y

Définition 2

On appelle *covariance* de X et Y le réel

- $\text{cov}(X, Y) \underset{\text{déf.}}{=} E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right)$
- ou aussi : $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Exercice 4

Démontrer l'égalité des deux expressions de la covariance.

3 Covariance de deux variables aléatoires réelles X et Y

Définition 2

On appelle *covariance* de X et Y le réel

- $\text{cov}(X, Y) \underset{\text{déf.}}{=} E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right)$
- ou aussi : $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Remarque

- Si X et Y sont indépendantes : $\text{cov}(X, Y) =$

3 Covariance de deux variables aléatoires réelles X et Y

Définition 2

On appelle *covariance* de X et Y le réel

- $\text{cov}(X, Y) \underset{\text{déf.}}{=} E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right)$
- ou aussi : $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Remarque

- Si X et Y sont indépendantes : $\text{cov}(X, Y) = 0$

3 Covariance de deux variables aléatoires réelles X et Y

Définition 2

On appelle *covariance* de X et Y le réel

- $\text{cov}(X, Y) \underset{\text{déf.}}{=} E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right)$
- ou aussi : $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

X et Y sont dites non corrélées

Remarque

- Si X et Y sont indépendantes : $\text{cov}(X, Y) = 0$

3 Covariance de deux variables aléatoires réelles X et Y

Définition 2

On appelle *covariance* de X et Y le réel

- $\text{cov}(X, Y) \underset{\text{déf.}}{=} E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right)$
- ou aussi : $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

X et Y sont dites non corrélées

Remarque

- Si X et Y sont indépendantes : $\text{cov}(X, Y) = 0$
- En particulier $\text{cov}(X, X) =$

3 Covariance de deux variables aléatoires réelles X et Y

Définition 2

On appelle *covariance* de X et Y le réel

- $\text{cov}(X, Y) \underset{\text{déf.}}{=} E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right)$
- ou aussi : $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

X et Y sont dites non corrélées

Remarque

- Si X et Y sont indépendantes : $\text{cov}(X, Y) = 0$
- En particulier $\text{cov}(X, X) = V(X)$

3 Covariance de deux variables aléatoires réelles X et Y

Théorème 4 : Variance d'une somme

3 Covariance de deux variables aléatoires réelles X et Y

Théorème 4 : Variance d'une somme

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \operatorname{cov}(X, Y)$$

3 Covariance de deux variables aléatoires réelles X et Y

Théorème 4 : Variance d'une somme

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \operatorname{cov}(X, Y)$$

Remarque

Plus généralement

$$V(X_1 + \cdots + X_n) =$$

3 Covariance de deux variables aléatoires réelles X et Y

Théorème 4 : Variance d'une somme

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \operatorname{cov}(X, Y)$$

Remarque

Plus généralement

$$V(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \operatorname{cov}(X_i, X_j)$$

II Loi d'un couple de variables aléatoires

I Variables aléatoires indépendantes, covariance

II Loi d'un couple de variables aléatoires

III Compléments : inégalités probabilistes

1 Loi conjointe, marginales

Cadre

X, Y sont des variables aléatoires sur Ω .

Vocabulaire

Trois notions de loi

1 Loi conjointe, marginales

Cadre

X, Y sont des variables aléatoires sur Ω .

Vocabulaire

Trois notions de loi

P_X sur $X(\Omega)$		

1 Loi conjointe, marginales

Cadre

X, Y sont des variables aléatoires sur Ω .

Vocabulaire

Trois notions de loi

P_X sur $X(\Omega)$		
$A \mapsto P(X \in A)$		

1 Loi conjointe, marginales

Cadre

X, Y sont des variables aléatoires sur Ω .

Vocabulaire

Trois notions de loi

P_X sur $X(\Omega)$		
$A \mapsto P(X \in A)$		
$(P(X = i))_{i \in X(\Omega)}$		

1 Loi conjointe, marginales

Cadre

X, Y sont des variables aléatoires sur Ω .

Vocabulaire

Trois notions de loi

P_X sur $X(\Omega)$	P_Y sur $Y(\Omega)$	
$A \mapsto P(X \in A)$	$B \mapsto P(Y \in B)$	
$(P(X = i))_{i \in X(\Omega)}$	$(P(Y = j))_{j \in Y(\Omega)}$	

1 Loi conjointe, marginales

Cadre

X, Y sont des variables aléatoires sur Ω .

Vocabulaire

Trois notions de loi

P_X sur $X(\Omega)$	P_Y sur $Y(\Omega)$	$P_{(X,Y)}$ sur $(X, Y)(\Omega)$
$A \mapsto P(X \in A)$	$B \mapsto P(Y \in B)$	$(A, B) \mapsto P(X \in A, Y \in B)$
$(P(X = i))_{i \in X(\Omega)}$	$(P(Y = j))_{j \in Y(\Omega)}$	

1 Loi conjointe, marginales

Cadre

X, Y sont des variables aléatoires sur Ω .

Vocabulaire

Trois notions de loi

P_X sur $X(\Omega)$	P_Y sur $Y(\Omega)$	$P_{(X,Y)}$ sur $(X, Y)(\Omega)$
$A \mapsto P(X \in A)$	$B \mapsto P(Y \in B)$	$(A, B) \mapsto P(X \in A, Y \in B)$
$(P(X = i))_{i \in X(\Omega)}$	$(P(Y = j))_{j \in Y(\Omega)}$	$(P(X = i, Y = j))_{(i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$

1 Loi conjointe, marginales

Cadre

X, Y sont des variables aléatoires sur Ω .

Vocabulaire

Trois notions de loi

P_X sur $X(\Omega)$	P_Y sur $Y(\Omega)$	$P_{(X,Y)}$ sur $(X, Y)(\Omega)$
$A \mapsto P(X \in A)$	$B \mapsto P(Y \in B)$	$(A, B) \mapsto P(X \in A, Y \in B)$
$(P(X = i))_{i \in X(\Omega)}$	$(P(Y = j))_{j \in Y(\Omega)}$	$(P(X = i, Y = j))_{(i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$
lois marginales de (X, Y)		

1 Loi conjointe, marginales

Cadre

X, Y sont des variables aléatoires sur Ω .

Vocabulaire

Trois notions de loi

P_X sur $X(\Omega)$	P_Y sur $Y(\Omega)$	$P_{(X,Y)}$ sur $(X, Y)(\Omega)$
$A \mapsto P(X \in A)$	$B \mapsto P(Y \in B)$	$(A, B) \mapsto P(X \in A, Y \in B)$
$(P(X = i))_{i \in X(\Omega)}$	$(P(Y = j))_{j \in Y(\Omega)}$	$(P(X = i, Y = j))_{(i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$
lois marginales de (X, Y)		loi conjointe de X et Y

1 Loi conjointe, marginales

Cadre

X, Y sont des variables aléatoires sur Ω .

Vocabulaire

Trois notions de loi

P_X sur $X(\Omega)$	P_Y sur $Y(\Omega)$	$P_{(X,Y)}$ sur $(X, Y)(\Omega)$
$A \mapsto P(X \in A)$	$B \mapsto P(Y \in B)$	$(A, B) \mapsto P(X \in A, Y \in B)$
$(P(X = i))_{i \in X(\Omega)}$	$(P(Y = j))_{j \in Y(\Omega)}$	$(P(X = i, Y = j))_{(i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$
lois marginales de (X, Y)		loi conjointe de X et Y

SF 6 : déterminer la loi conjointe de X et Y revient à

1 Loi conjointe, marginales

Cadre

X, Y sont des variables aléatoires sur Ω .

Vocabulaire

Trois notions de loi

P_X sur $X(\Omega)$	P_Y sur $Y(\Omega)$	$P_{(X,Y)}$ sur $(X, Y)(\Omega)$
$A \mapsto P(X \in A)$	$B \mapsto P(Y \in B)$	$(A, B) \mapsto P(X \in A, Y \in B)$
$(P(X = i))_{i \in X(\Omega)}$	$(P(Y = j))_{j \in Y(\Omega)}$	$(P(X = i, Y = j))_{(i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$
lois marginales de (X, Y)		loi conjointe de X et Y

SF 6 : déterminer la loi conjointe de X et Y revient à

i) Donner les valeurs prises par X et Y

1 Loi conjointe, marginales

Cadre

X, Y sont des variables aléatoires sur Ω .

Vocabulaire

Trois notions de loi

P_X sur $X(\Omega)$	P_Y sur $Y(\Omega)$	$P_{(X,Y)}$ sur $(X, Y)(\Omega)$
$A \mapsto P(X \in A)$	$B \mapsto P(Y \in B)$	$(A, B) \mapsto P(X \in A, Y \in B)$
$(P(X = i))_{i \in X(\Omega)}$	$(P(Y = j))_{j \in Y(\Omega)}$	$(P(X = i, Y = j))_{(i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$
lois marginales de (X, Y)		loi conjointe de X et Y

SF 6 : déterminer la loi conjointe de X et Y revient à

- i) Donner les valeurs prises par X et Y
- ii) Calculer les $P(X = i, Y = j)$ pour $i \in X(\Omega)$ et $j \in Y(\Omega)$

1 Loi conjointe, marginales

SF 6 : déterminer la loi conjointe de X et Y revient à

- i) Donner les valeurs prises par X et Y
- ii) Calculer les $P(X = i, Y = j)$ pour $i \in X(\Omega)$ et $j \in Y(\Omega)$

Exemple 1 : Déterminer la loi de (X, Y)

On tire simultanément 2 boules dans une urne contenant 3 boules jaunes, une noire et 6 rouges. X est le nombre de boules jaunes et Y le nombre de boules noires obtenues.

1 Loi conjointe, marginales

X \ Y	0	1
	0	1
0		
1		
2		

SF 6 : déterminer

la loi de X et Y revient à

i) Donner les

et Y

ii) Calculer les

pour $i \in X(\Omega)$ et $j \in Y(\Omega)$

Exemple 1 : Déterminer la loi de (X, Y)

On tire simultanément 2 boules dans une urne contenant 3 boules jaunes, une noire et 6 rouges. X est le nombre de boules jaunes et Y le nombre de boules noires obtenues.

1 Loi conjointe, marginales

$X \backslash Y$	0	1
	0	1
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{15}$
1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$
2	$\frac{1}{15}$	0

SF 6 : déterm

e de X et Y revient à

i) Donner les

t Y

ii) Calculer les

r $i \in X(\Omega)$ et $j \in Y(\Omega)$

Exemple 1 : Déterminer la loi de (X, Y)

On tire simultanément 2 boules dans une urne contenant 3 boules jaunes, une noire et 6 rouges. X est le nombre de boules jaunes et Y le nombre de boules noires obtenues.

1 Loi conjointe, marginales

X \ Y	Y		
	0	1	
0	$\frac{5}{15}$	$\frac{2}{15}$	
1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$	
2	$\frac{1}{15}$	0	

la loi de (X, Y)

boules dans une urne contenant 3 boules
ges. X est le nombre de boules jaunes et
noires obtenues.

Théorème 1 : La loi conjointe donne les lois marginales

Pour tout $i \in X(\Omega)$

Pour tout $j \in Y(\Omega)$

1 Loi conjointe, marginales

X \ Y	Y		
	0	1	
0	$\frac{5}{15}$	$\frac{2}{15}$	
1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$	
2	$\frac{1}{15}$	0	

la loi de (X, Y)

boules dans une urne contenant 3 boules
ges. X est le nombre de boules jaunes et
noires obtenues.

Théorème 1 : La loi conjointe donne les lois marginales

Pour tout $i \in X(\Omega)$

Pour tout $j \in Y(\Omega)$

$$P(X=i) = \sum_{j \in Y(\Omega)} P(X=i, Y=j)$$

1 Loi conjointe, marginales

X \ Y	Y		
	0	1	
0	$\frac{5}{15}$	$\frac{2}{15}$	
1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$	
2	$\frac{1}{15}$	0	

la loi de (X, Y)

boules dans une urne contenant 3 boules
ges. X est le nombre de boules jaunes et
noires obtenues.

Théorème 1 : La loi conjointe donne les lois marginales

Pour tout $i \in X(\Omega)$

$$P(X=i) = \sum_{j \in Y(\Omega)} P(X=i, Y=j)$$

Pour tout $j \in Y(\Omega)$

$$P(Y=j) = \sum_{i \in X(\Omega)} P(X=i, Y=j)$$

1 Loi conjointe, marginales

X \ Y	Y		X
	0	1	
0	$\frac{5}{15}$	$\frac{2}{15}$	
1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$	
2	$\frac{1}{15}$	0	
Y			

la loi de (X, Y)

boules dans une urne contenant 3 boules
ges. X est le nombre de boules jaunes et
noires obtenues.

Théorème 1 : La loi conjointe donne les lois marginales

Pour tout $i \in X(\Omega)$

$$P(X=i) = \sum_{j \in Y(\Omega)} P(X=i, Y=j)$$

Pour tout $j \in Y(\Omega)$

$$P(Y=j) = \sum_{i \in X(\Omega)} P(X=i, Y=j)$$

1 Loi conjointe, marginales

x \ y	Y		X
	0	1	
0	$\frac{5}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{7}{15}$
1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{15}$
2	$\frac{1}{15}$	0	$\frac{1}{15}$
Y	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	

la loi de (X, Y)

boules dans une urne contenant 3 boules
ges. X est le nombre de boules jaunes et
noires obtenues.

Théorème 1 : La loi conjointe donne les lois marginales

Pour tout $i \in X(\Omega)$

$$P(X=i) = \sum_{j \in Y(\Omega)} P(X=i, Y=j)$$

Pour tout $j \in Y(\Omega)$

$$P(Y=j) = \sum_{i \in X(\Omega)} P(X=i, Y=j)$$

Exercice 1

Démontrer la formule pour le premier point.

1 Loi conjointe, marginales

X \ Y	Y		X
	0	1	
0	$\frac{5}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{7}{15}$
1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{15}$
2	$\frac{1}{15}$	0	$\frac{1}{15}$
Y	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	

la loi de (X, Y)

boules dans une urne contenant 3 boules
ges. X est le nombre de boules jaunes et
noires obtenues.

Théorème 1 : La loi conjointe donne les lois marginales

Pour tout $i \in X(\Omega)$

$$P(X=i) = \sum_{j \in Y(\Omega)} P(X=i, Y=j)$$

Pour tout $j \in Y(\Omega)$

$$P(Y=j) = \sum_{i \in X(\Omega)} P(X=i, Y=j)$$

Remarque

1. On a toujours :
$$\sum_{i \in X(\Omega)} \sum_{j \in Y(\Omega)} P(X=i, Y=j) = 1$$

1 Loi conjointe, marginales

x \ Y	Y		X
	0	1	
0	$\frac{5}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{7}{15}$
1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{15}$
2	$\frac{1}{15}$	0	$\frac{1}{15}$
Y	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	

la loi de (X, Y)

boules dans une urne contenant 3 boules
ges. X est le nombre de boules jaunes et
noires obtenues.

Théorème 1 : La loi conjointe donne les lois marginales

Pour tout $i \in X(\Omega)$

$$P(X=i) = \sum_{j \in Y(\Omega)} P(X=i, Y=j)$$

Pour tout $j \in Y(\Omega)$

$$P(Y=j) = \sum_{i \in X(\Omega)} P(X=i, Y=j)$$

Remarque

2. Les lois de X et Y ne permettent pas de retrouver la loi conjointe

1 Loi conjointe, marginales

x \ Y	Y		X
	0	1	
0			$\frac{7}{15}$
1			$\frac{7}{15}$
2			$\frac{1}{15}$
Y	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	

la loi de (X, Y)

boules dans une urne contenant 3 boules
ges. X est le nombre de boules jaunes et
noires obtenues.

Théorème 1 : La loi conjointe donne les lois marginales

Pour tout $i \in X(\Omega)$

$$P(X=i) = \sum_{j \in Y(\Omega)} P(X=i, Y=j)$$

Pour tout $j \in Y(\Omega)$

$$P(Y=j) = \sum_{i \in X(\Omega)} P(X=i, Y=j)$$

Remarque

2. Les lois de X et Y ne permettent pas de retrouver la loi conjointe

2 Loi conditionnelle

Vocabulaire

- *Loi conditionnelle de Y sachant A :*

2 Loi conditionnelle

Vocabulaire

- *Loi conditionnelle de Y sachant A : probabilité $B \mapsto P_A(Y \in B)$.*

2 Loi conditionnelle

Déterminée par : $(P_A(Y = j))_{j \in Y(\Omega)}$

Vocabulaire

- *Loi conditionnelle de Y sachant A* : probabilité $B \mapsto P_A(Y \in B)$.

2 Loi conditionnelle

Vocabulaire

Déterminée par : $(P_A(Y = j))_{j \in Y(\Omega)}$

- *Loi conditionnelle de Y sachant A* : probabilité $B \mapsto P_A(Y \in B)$.

Utiliser la loi conditionnelle pour trouver la loi :

En général on *cherche*

2 Loi conditionnelle

Vocabulaire

Déterminée par : $(P_A(Y = j))_{j \in Y(\Omega)}$

- Loi conditionnelle de Y sachant A : probabilité $B \mapsto P_A(Y \in B)$.

connaissant les $P_{\{X=i\}}(Y = j)$

Utiliser la loi conditionnelle pour trouver la loi :

En général on cherche $P(Y = j) =$

2 Loi conditionnelle

Vocabulaire

Déterminée par : $(P_A(Y = j))_{j \in Y(\Omega)}$

- Loi conditionnelle de Y sachant A : probabilité $B \mapsto P_A(Y \in B)$.

connaissant les $P_{\{X=i\}}(Y = j)$

Utiliser la loi conditionnelle pour trouver la loi :

En général on cherche

$$P(Y = j) = \sum_{i \in X(\Omega)} P_{\{X=i\}}(Y = j)P(X = i)$$

2 Loi conditionnelle

Vocabulaire

Déterminée par : $(P_A(Y = j))_{j \in Y(\Omega)}$

- Loi conditionnelle de Y sachant A : probabilité $B \mapsto P_A(Y \in B)$.

connaissant les $P_{\{X=i\}}(Y = j)$

Utiliser la loi conditionnelle pour trouver la loi :

En général on cherche

$$P(Y = j) = \sum_{i \in X(\Omega)} P_{\{X=i\}}(Y = j)P(X = i)$$

Exemple 2

On dispose de n urnes $U_1, \dots, U_n$. Pour $1 \leq k \leq n$, l'urne U_k contient k boules numérotées de 1 à k . On choisit une urne au hasard puis on tire une boule au hasard dans l'urne choisie. On note X est le numéro de l'urne choisie et Y le numéro de la boule.

- Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $\{X = i\}$.
- En déduire la loi de Y puis son espérance.

Exemple 3 : Ex. 98, banque INP

Une lionne affamée attaque chaque membre d'un troupeau de n gazelles. Les attaques sont indépendantes et chaque gazelle est attrapée avec probabilité $p \in]0, 1[$.

1. Donner la loi du nombre X de gazelles attrapées par la lionne.

2 Loi conditionnelle

Exemple 3 : Ex. 98, banque INP

Une lionne affamée attaque chaque membre d'un troupeau de n gazelles. Les attaques sont indépendantes et chaque gazelle est attrapée avec probabilité $p \in]0, 1[$.

1. Donner la loi du nombre X de gazelles attrapées par la lionne.

Loin d'être rassasiée, la lionne attaque une seconde fois, dans les mêmes conditions, les $n - X$ gazelles qu'elle n'a pu attraper au cours de la première série d'attaques. On note Y le nombre de gazelles attrapées cette fois.

2 Loi conditionnelle

Exemple 3 : Ex. 98, banque INP

Une lionne affamée attaque chaque membre d'un troupeau de n gazelles. Les attaques sont indépendantes et chaque gazelle est attrapée avec probabilité $p \in]0, 1[$.

1. Donner la loi du nombre X de gazelles attrapées par la lionne.
Loin d'être rassasiée, la lionne attaque une seconde fois, dans les mêmes conditions, les $n - X$ gazelles qu'elle n'a pu attraper au cours de la première série d'attaques. On note Y le nombre de gazelles attrapées cette fois.
2. Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Donner la loi conditionnelle de Y sachant $\{X = i\}$
3. On pose $Z = X + Y$. Montrer que $Z \sim \mathcal{B}(n, 2p - p^2)$.

3 Espérance d'un produit

Cadre

X, Y sont à valeurs complexes. La formule de transfert s'écrit :

$$E(f(X, Y)) =$$

3 Espérance d'un produit

Cadre

X, Y sont à valeurs complexes. La formule de transfert s'écrit :

$$E(f(X, Y)) = \sum_{i \in X(\Omega)} \sum_{j \in Y(\Omega)} f(i, j) P(X = i, Y = j)$$

3 Espérance d'un produit

Cadre

X, Y sont à valeurs complexes. La formule de transfert s'écrit :

$$E(f(X, Y)) = \sum_{i \in X(\Omega)} \sum_{j \in Y(\Omega)} f(i, j) P(X = i, Y = j)$$

Théorème 2 : Espérance de XY

3 Espérance d'un produit

Cadre

X, Y sont à valeurs complexes. La formule de transfert s'écrit :

$$E(f(X, Y)) = \sum_{i \in X(\Omega)} \sum_{j \in Y(\Omega)} f(i, j) P(X = i, Y = j)$$

Théorème 2 : Espérance de XY

$$E(XY) = \sum_{i \in X(\Omega)} \sum_{j \in Y(\Omega)} ij P(X = i, Y = j)$$

3 Espérance d'un produit

Cadre

X, Y sont à valeurs complexes. La formule de transfert s'écrit :

$$E(f(X, Y)) = \sum_{i \in X(\Omega)} \sum_{j \in Y(\Omega)} f(i, j) P(X = i, Y = j)$$

Théorème 2 : Espérance de XY

$$E(XY) = \sum_{i \in X(\Omega)} \sum_{j \in Y(\Omega)} ij P(X = i, Y = j)$$

Exercice 2

Montrer que si X et Y sont indépendantes : $E(XY) = E(X)E(Y)$.

III Compléments : inégalités probabilistes

I Variables aléatoires indépendantes, covariance

II Loi d'un couple de variables aléatoires

III Compléments : inégalités probabilistes

X est une variable aléatoire *réelle* sur (Ω, P) .

1 Inégalité de Markov

Théorème 1 : Inégalité de Markov

Si X est positive alors, pour tout $a > 0$:

1 Inégalité de Markov

Théorème 1 : Inégalité de Markov

Si X est **positive** alors, pour tout $a > 0$:

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

1 Inégalité de Markov

Théorème 1 : Inégalité de Markov

Si X est **positive** alors, pour tout $a > 0$:

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Exercice 1 : « La ruse de l'indicatrice »

Démontrer l'inégalité de Markov.

1 Inégalité de Markov

Théorème 1 : Inégalité de Markov

Si X est positive alors, pour tout $a > 0$:

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Exemple 1 : $X \sim \mathcal{B}(n, p)$

En appliquant l'inégalité de Markov, à une variable judicieusement choisie, montrer :

$$\forall t, \varepsilon > 0, \quad P(X - np \geq n\varepsilon) \leq e^{-nt\varepsilon} E(e^{t(X-np)})$$

2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème 2 : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Pour tout $a > 0$:

2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème 2 : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Pour tout $a > 0$:

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème 2 : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Pour tout $a > 0$:

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

Exercice 2

Démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev en appliquant l'inégalité de Markov à une variable aléatoire Z bien choisie

2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème 2 : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Pour tout $a > 0$:

$$P\left(|X - E(X)| \geq a\right) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

Exemple 2 : $X_1, \dots, X_n$ sont des v.a. réelles i.i.d.

On note m leur espérance et σ leur écart-type et on pose

$S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

établir : $\forall \varepsilon > 0, \quad P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$

3 Théorème d'approximation polynomiale de Weierstrass

Cadre

$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue

3 Théorème d'approximation polynomiale de Weierstrass

Cadre

$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue

Objectif

Trouver une suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales vérifiant

$$\|f - p_n\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

3 Théorème d'approximation polynomiale de Weierstrass

Cadre

$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue

Objectif

Trouver une suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales vérifiant

$$\|f - p_n\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Les polynômes de Bernstein

$$p_n : x \mapsto \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

3 Théorème d'approximation polynomiale de Weierstrass

Exemple 3 : Polynômes de Bernstein

1. Soit $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$ fixés. On se donne une variable aléatoire S_n de loi binomiale $\mathcal{B}(n, x)$.

a) Montrer que : $|p_n(x) - f(x)| \leq E\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right|\right)$.

b) Justifier l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall x, y \in [0, 1], \quad |x - y| \leq \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

c) Montrer que $E\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \mathbb{1}_A\right) \leq \varepsilon$ où $A = \left\{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| < \alpha\right\}$

d) En déduire que : $|p_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}$.

2. Montrer que $\|f - p_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

3 Théorème d'approximation polynomiale de Weierstrass

Exemple 3 : Polynômes de Bernstein

1. Soit $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$ fixés. On se donne une variable aléatoire S_n de loi binomiale $\mathcal{B}(n, x)$.

a) Montrer que : $|p_n(x) - f(x)| \leq E\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right|\right)$.

b) Justifier l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall x, y \in [0, 1], \quad |x - y| \leq \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

c) Montrer que $E\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \mathbb{1}_A\right) \leq \varepsilon$ où $A = \left\{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| < \alpha\right\}$

d) En déduire que : $|p_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}$.

2. Montrer que $\|f - p_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$