

Variables aléatoires

Chapitre 31

Dans tout le chapitre

- Ω est un univers fini.
- P est une probabilité sur Ω .

I Loi d'une variable aléatoire

I Loi d'une variable aléatoire

II Espérance et variance d'une variable aléatoire

III Lois usuelles finies

Définition 1

Une *variable aléatoire* sur Ω est :

1 Généralités

Définition 1

Une *variable aléatoire* sur Ω est : une application X de Ω dans un ensemble E

1 Généralités

variable aléatoire réelle
si $E = \mathbb{R}$

Définition 1

Une *variable aléatoire* sur Ω est : une application X de Ω dans un ensemble E

Exemple 1

On lance deux fois un dé équilibré on peut choisir pour univers $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$. La fonction X : « somme des deux résultats obtenus » est une variable aléatoire. L'ensemble $X(\Omega)$ de toutes les valeurs prises par X est :

1 Généralités

variable aléatoire réelle
si $E = \mathbb{R}$

Définition 1

Une *variable aléatoire* sur Ω est : une application X de Ω dans un ensemble E

Exemple 1

On lance deux fois un dé équilibré on peut choisir pour univers $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$. La fonction X : « somme des deux résultats obtenus » est une variable aléatoire. L'ensemble $X(\Omega)$ de toutes les valeurs prises par X est : $X(\Omega) = \llbracket 2, 12 \rrbracket$.

1 Généralités

variable aléatoire réelle
si $E = \mathbb{R}$

Définition 1

Une *variable aléatoire* sur Ω est : une application X de Ω dans un ensemble E

Exemple 2 : On lance une pièce n fois d'affilée

On note X le numéro du premier lancer qui donne pile si l'on obtient au moins un pile et on pose $X = n + 1$ sinon. L'ensemble de toutes les valeurs prises par X est :

1 Généralités

variable aléatoire réelle
si $E = \mathbb{R}$

Définition 1

Une *variable aléatoire* sur Ω est : une application X de Ω dans un ensemble E

Exemple 2 : On lance une pièce n fois d'affilée

On note X le numéro du premier lancer qui donne pile si l'on obtient au moins un pile et on pose $X = n + 1$ sinon. L'ensemble de toutes les valeurs prises par X est : $X(\Omega) = \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$

1 Généralités

Notations

Soit X une variable aléatoire sur Ω à valeurs dans E .

- Pour tout $A \subset E$, l'événement $X^{-1}(A)$ est noté $\{X \in A\}$:

$$\{X \in A\} \underset{\text{déf.}}{=}$$

1 Généralités

Notations

Soit X une variable aléatoire sur Ω à valeurs dans E .

- Pour tout $A \subset E$, l'événement $X^{-1}(A)$ est noté $\{X \in A\}$:

$$\{X \in A\} \underset{\text{déf.}}{=} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$$

1 Généralités

Notations

Soit X une variable aléatoire sur Ω à valeurs dans E .

- Pour tout $A \subset E$, l'événement $X^{-1}(A)$ est noté $\{X \in A\}$:

$$\{X \in A\} \underset{\text{déf.}}{=} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$$

- Pour tout $k \in E$: $\{X = k\} \underset{\text{déf.}}{=}$

1 Généralités

Notations

Soit X une variable aléatoire sur Ω à valeurs dans E .

- Pour tout $A \subset E$, l'événement $X^{-1}(A)$ est noté $\{X \in A\}$:

$$\{X \in A\} \underset{\text{déf.}}{=} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$$

- Pour tout $k \in E$: $\{X = k\} \underset{\text{déf.}}{=} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = k\}$

1 Généralités

Notations

Soit X une variable aléatoire sur Ω à valeurs dans E .

- Pour tout $A \subset E$, l'événement $X^{-1}(A)$ est noté $\{X \in A\}$:

$$\{X \in A\} \underset{\text{déf.}}{=} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$$

- Pour tout $k \in E$: $\{X = k\} \underset{\text{déf.}}{=} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = k\}$

- Si $E = \mathbb{R}$: $\{X \leq k\} \underset{\text{déf.}}{=}$

1 Généralités

Notations

Soit X une variable aléatoire sur Ω à valeurs dans E .

- Pour tout $A \subset E$, l'événement $X^{-1}(A)$ est noté $\{X \in A\}$:

$$\{X \in A\} \underset{\text{déf.}}{=} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$$

- Pour tout $k \in E$: $\{X = k\} \underset{\text{déf.}}{=} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = k\}$

- Si $E = \mathbb{R}$: $\{X \leq k\} \underset{\text{déf.}}{=} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq k\}$

1 Généralités

Notations

Soit X une variable aléatoire sur Ω à valeurs dans E .

- Pour tout $A \subset E$, l'événement $X^{-1}(A)$ est noté $\{X \in A\}$:

$$\{X \in A\} \underset{\text{déf.}}{=} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$$

- Pour tout $k \in E$: $\{X = k\} \underset{\text{déf.}}{=} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = k\}$

- Si $E = \mathbb{R}$: $\{X \leq k\} \underset{\text{déf.}}{=} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq k\}$

Remarque

$(\{X = k\})_{k \in X(\Omega)}$ forment un :

1 Généralités

Notations

Soit X une variable aléatoire sur Ω à valeurs dans E .

- Pour tout $A \subset E$, l'événement $X^{-1}(A)$ est noté $\{X \in A\}$:

$$\{X \in A\} \underset{\text{déf.}}{=} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$$

- Pour tout $k \in E$: $\{X = k\} \underset{\text{déf.}}{=} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = k\}$
- Si $E = \mathbb{R}$: $\{X \leq k\} \underset{\text{déf.}}{=} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq k\}$

Remarque

$(\{X = k\})_{k \in X(\Omega)}$ forment un : système complet d'événements

1 Généralités

Notations

Soit X une variable aléatoire sur Ω à valeurs dans E .

- Pour tout $A \subset E$, l'événement $X^{-1}(A)$ est noté $\{X \in A\}$:

$$\{X \in A\} \underset{\text{déf.}}{=} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$$

- Pour tout $k \in E$: $\{X = k\} \underset{\text{déf.}}{=} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = k\}$
- Si $E = \mathbb{R}$: $\{X \leq k\} \underset{\text{déf.}}{=} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq k\}$

s.c.e. associé à X

Remarque

$(\{X = k\})_{k \in X(\Omega)}$ forment un : système complet d'événements

1 Généralités

Notations

On écrit : $P(X = k)$

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans E .

au lieu de $P(\{X = k\})$

- Pour tout $A \subset E$, l'événement $X^{-1}(A)$ est noté $\{X \in A\}$:

$$\{X \in A\} \stackrel{\text{déf.}}{=} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$$

- Pour tout $k \in E$: $\{X = k\} \stackrel{\text{déf.}}{=} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = k\}$
- Si $E = \mathbb{R}$: $\{X \leq k\} \stackrel{\text{déf.}}{=} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq k\}$

s.c.e. associé à X

Remarque

$(\{X = k\})_{k \in X(\Omega)}$ forment un : système complet d'événements

1 Généralités

Notations

Soit X une variable aléatoire sur E à valeurs dans E .

On écrit : $P(X = k)$
au lieu de $P(\{X = k\})$

Que désigne $P(X)$?

Réponse :

- Pour tout $A \subset E$, l'événement $X^{-1}(A)$ est noté $\{X \in A\}$:

$$\{X \in A\} \stackrel{\text{déf.}}{=} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$$

- Pour tout $k \in E$: $\{X = k\} \stackrel{\text{déf.}}{=} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = k\}$
- Si $E = \mathbb{R}$: $\{X \leq k\} \stackrel{\text{déf.}}{=} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq k\}$

s.c.e. associé à X

Remarque

$(\{X = k\})_{k \in X(\Omega)}$ forment un : système complet d'événements

1 Généralités

Notations

Soit X une variable aléatoire sur E à valeurs dans E .

On écrit : $P(X = k)$
au lieu de $P(\{X = k\})$

Que désigne $P(X)$?
Réponse : rien

- Pour tout $A \subset E$, l'événement $X^{-1}(A)$ est noté $\{X \in A\}$:

$$\{X \in A\} \stackrel{\text{déf.}}{=} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$$

- Pour tout $k \in E$: $\{X = k\} \stackrel{\text{déf.}}{=} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = k\}$
- Si $E = \mathbb{R}$: $\{X \leq k\} \stackrel{\text{déf.}}{=} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq k\}$

s.c.e. associé à X

Remarque

$(\{X = k\})_{k \in X(\Omega)}$ forment un : système complet d'événements

1 Généralités

Notations

Soit X une variable aléatoire sur Ω à valeurs dans E .

- Pour tout $A \subset E$, l'événement $X^{-1}(A)$ est noté $\{X \in A\}$:

$$\{X \in A\} \underset{\text{déf.}}{=} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$$

- Pour tout $k \in E$: $\{X = k\} \underset{\text{déf.}}{=} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = k\}$
- Si $E = \mathbb{R}$: $\{X \leq k\} \underset{\text{déf.}}{=} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq k\}$

s.c.e. associé à X

Remarque

$(\{X = k\})_{k \in X(\Omega)}$ forment un : système complet d'événements

Exercice 1 : Montrer que P_X est une probabilité sur $X(\Omega)$

P_X est définie sur $\mathcal{P}(X(\Omega))$ par : $P_X(A) = P(X \in A)$ pour tout $A \subset X(\Omega)$

2 La pratique : déterminer la loi de X

Vocabulaire

- *Loi de X* : la probabilité P_X sur $X(\Omega)$.

2 La pratique : déterminer la loi de X

$$P_X(A) = P(X \in A)$$

Vocabulaire

- *Loi de X* : la probabilité P_X sur $X(\Omega)$.

2 La pratique : déterminer la loi de X

$$P_X(A) = P(X \in A)$$

Vocabulaire

- *Loi de X* : la probabilité P_X sur $X(\Omega)$.
- *Distribution de probabilités de X* : la famille $(P(X = k))_{k \in X(\Omega)}$

2 La pratique : déterminer la loi de X

$$P_X(A) = P(X \in A) = \sum_{k \in A} P(X = k)$$

Vocabulaire

- *Loi de X* : la probabilité P_X sur $X(\Omega)$.
- *Distribution de probabilités de X* : la famille $(P(X = k))_{k \in X(\Omega)}$

2 La pratique : déterminer la loi de X

$$P_X(A) = P(X \in A) = \sum_{k \in A} P(X = k)$$

Vocabulaire

- *Loi de X* : la probabilité P_X sur $X(\Omega)$.
- *Distribution de probabilités de X* : la famille $(P(X = k))_{k \in X(\Omega)}$

SF 1 : déterminer la loi de X revient à

2 La pratique : déterminer la loi de X

$$P_X(A) = P(X \in A) = \sum_{k \in A} P(X = k)$$

Vocabulaire

- *Loi de X* : la probabilité P_X sur $X(\Omega)$.
- *Distribution de probabilités de X* : la famille $(P(X = k))_{k \in X(\Omega)}$

SF 1 : déterminer la loi de X revient à

- Donner les valeurs prises par X .

2 La pratique : déterminer la loi de X

$$P_X(A) = P(X \in A) = \sum_{k \in A} P(X = k)$$

Vocabulaire

- *Loi de X* : la probabilité P_X sur $X(\Omega)$.
- *Distribution de probabilités de X* : la famille $(P(X = k))_{k \in X(\Omega)}$

SF 1 : déterminer la loi de X revient à

- Donner les valeurs prises par X .
- Calculer les $P(X = k)$ pour $k \in X(\Omega)$.

2 La pratique : déterminer la loi de X

$$P_X(A) = P(X \in A) = \sum_{k \in A} P(X = k)$$

Vocabulaire

- *Loi de X* : la probabilité P_X sur $X(\Omega)$.
- *Distribution de probabilités de X* : la famille $(P(X = k))_{k \in X(\Omega)}$

SF 1 : déterminer la loi de X revient à

- Donner les valeurs prises par X .
- Calculer les $P(X = k)$ pour $k \in X(\Omega)$.

Exemple 3 : Déterminer la loi de X

On lance un dé équilibré et on note X le résultat obtenu.

2 La pratique : déterminer la loi de X

$$P_X(A) = P(X \in A) = \sum_{k \in A} P(X = k)$$

Vocabulaire

- *Loi de X* : la probabilité P_X sur $X(\Omega)$.
- *Distribution de probabilités de X* : la famille $(P(X = k))_{k \in X(\Omega)}$

SF 1 : déterminer la loi de X revient à

- Donner les valeurs prises par X .
- Calculer les $P(X = k)$ pour $k \in X(\Omega)$.

Exemple 4 : Déterminer la loi de X

On lance n fois une pièce donnant pile avec probabilité $p \in]0, 1[$.
On note X le numéro du premier lancer qui donne pile si l'on obtient au moins un pile et on pose $X = n + 1$ sinon.

2 La pratique : déterminer la loi de X

$$P_X(A) = P(X \in A) = \sum_{k \in A} P(X = k)$$

Vocabulaire

- *Loi de X* : la probabilité P_X sur $X(\Omega)$.
- *Distribution de probabilités de X* : la famille $(P(X = k))_{k \in X(\Omega)}$

SF 1 : déterminer la loi de X revient à

- Donner les valeurs prises par X .
- Calculer les $P(X = k)$ pour $k \in X(\Omega)$.

Exemple 5 : Déterminer la loi de X

Une urne contient deux boules blanches et $n - 2$ boules rouges que l'on tire une à une sans remise. On note X le rang de sortie de la première boule rouge.

2 La pratique : déterminer la loi de X

Stratégie à retenir avec un maximum

Exemple 6 : Déterminer la loi de X .

On tire successivement et sans remise deux boules dans une urne de n boules numérotées de 1 à n . On note X le plus grand des deux numéros obtenu.

2 La pratique : déterminer la loi de X

Stratégie à retenir avec un maximum

Exemple 6 : Déterminer la loi de X .

On tire successivement et sans remise deux boules dans une urne de n boules numérotées de 1 à n . On note X le plus grand des deux numéros obtenu.

Une astuce classique si X est à valeurs entières

$$P(X = k) =$$

2 La pratique : déterminer la loi de X

Stratégie à retenir avec un maximum

Exemple 6 : Déterminer la loi de X .

On tire successivement et sans remise deux boules dans une urne de n boules numérotées de 1 à n . On note X le plus grand des deux numéros obtenu.

Une astuce classique si X est à valeurs entières

$$P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k - 1)$$

2 La pratique : déterminer la loi de X

Stratégie à retenir avec un maximum

Exemple 6 : Déterminer la loi de X .

On tire successivement et sans remise deux boules dans une urne de n boules numérotées de 1 à n . On note X le plus grand des deux numéros obtenu.

Une astuce classique si X est à valeurs entières

$$P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k - 1)$$



X vaut k si

2 La pratique : déterminer la loi de X

Stratégie à retenir avec un maximum

Exemple 6 : Déterminer la loi de X .

On tire successivement et sans remise deux boules dans une urne de n boules numérotées de 1 à n . On note X le plus grand des deux numéros obtenu.

Une astuce classique si X est à valeurs entières

$$P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k - 1)$$

X vaut k si

X est
inférieur à k

2 La pratique : déterminer la loi de X

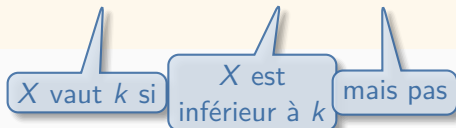
Stratégie à retenir avec un maximum

Exemple 6 : Déterminer la loi de X .

On tire successivement et sans remise deux boules dans une urne de n boules numérotées de 1 à n . On note X le plus grand des deux numéros obtenu.

Une astuce classique si X est à valeurs entières

$$P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k - 1)$$



2 La pratique : déterminer la loi de X

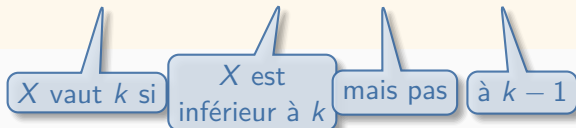
Stratégie à retenir avec un maximum

Exemple 6 : Déterminer la loi de X .

On tire successivement et sans remise deux boules dans une urne de n boules numérotées de 1 à n . On note X le plus grand des deux numéros obtenu.

Une astuce classique si X est à valeurs entières

$$P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k - 1)$$



2 La pratique : déterminer la loi de X

Exercice 2 : Loi de la variable aléatoire $f(X) \stackrel{\text{déf.}}{=} f \circ X$

Montrer que la loi de $f(X)$ est donnée par :

$$\forall y \in f(X(\Omega)), \quad P(f(X) = y) = \sum_{k \in f^{-1}(\{y\})} P(X = k)$$

vérifiant :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad p_k \geq 0$$

$$\text{et : } \sum_{k=0}^n p_k = 1$$

Un problème de rigueur ?

L'énoncé d'un exercice donne une famille $(p_k)_{0 \leq k \leq n}$ et « définit » une variable aléatoire X par :

vérifiant :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad p_k \geq 0$$

$$\text{et : } \sum_{k=0}^n p_k = 1$$

Un problème de rigueur ?

L'énoncé d'un exercice donne une famille $(p_k)_{0 \leq k \leq n}$ et « définit » une variable aléatoire X par :

« Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$ telle que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad P(X = k) = p_k \quad »$$

Remarque « culturelle » hors programme

Qui est Ω ??
Quelle probabilité P ??

vérifiant :
 $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad p_k \geq 0$
et : $\sum_{k=0}^n p_k = 1$

Un problème de rigueur ?

L'énoncé d'un exercice donne une famille $(p_k)_{0 \leq k \leq n}$ et « définit » une variable aléatoire X par :

« Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$ telle que :
 $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad P(X = k) = p_k$ »

Remarque « culturelle » hors programme

Qui est Ω ??
Quelle probabilité P ??

vérifiant :
 $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad p_k \geq 0$
et : $\sum_{k=0}^n p_k = 1$

Un problème de rigueur ?

L'énoncé d'un exercice donne une famille $(p_k)_{0 \leq k \leq n}$ et « définit » une variable aléatoire X par :

« Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$ telle que :
 $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad P(X = k) = p_k$ »

il existe un espace probabilisé (Ω, P)
et une v.a. X sur Ω d'image $\llbracket 0, n \rrbracket$
dont la distribution de proba est $(p_k)_{0 \leq k \leq n}$

II Espérance et variance d'une variable aléatoire

I Loi d'une variable aléatoire

II Espérance et variance d'une variable aléatoire

III Lois usuelles finies

Cadre

- (Ω, P) est un espace probabilisé fini
- X et Y sont des variables aléatoires *complexes* sur Ω

1 Espérance

Définition 1

L'espérance de X est le complexe : $E(X)$

1 Espérance

Définition 1

L'espérance de X est le complexe :
$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} kP(X = k)$$

1 Espérance

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i)$$

si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$

Définition 1

L'espérance de X est le complexe : $E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k P(X = k)$

1 Espérance

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i)$$

si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$

Définition 1

L'espérance de X est le complexe : $E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k P(X = k)$

Exemple 1

Si X est constante de valeur a : $E(X) =$

1 Espérance

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i)$$

si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$

Définition 1

L'espérance de X est le complexe : $E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k P(X = k)$

Exemple 1

Si X est constante de valeur a : $E(X) = a$

1 Espérance

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i)$$

si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$

Définition 1

L'espérance de X est le complexe : $E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} kP(X = k)$

Exemple 1

Si X est constante de valeur a : $E(X) = a$

Exemple 2 : Calculer $E(X)$

On lance n fois une pièce donnant pile avec probabilité $p \in]0, 1[$.
On note X le numéro du premier lancer qui donne pile si l'on obtient au moins un pile et on pose $X = n + 1$ sinon.

1 Espérance

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i)$$

si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$

Définition 1

L'espérance de X est le complexe : $E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k P(X = k)$

Exemple 1

Si X est constante de valeur a : $E(X) = a$

Exemple 3 : Mines 2018

On suppose que X est à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Montrer que pour tout $m \in \llbracket 1, n \rrbracket$: $E(X) \leq m - 1 + nP(X \geq m)$.

1 Espérance

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i)$$

si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$

Définition 1

L'espérance de X est le complexe : $E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k P(X = k)$

Exemple 1

Si X est constante de valeur a : $E(X) = a$

Exercice 1 : Une autre expression de l'espérance

Montrer que :

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\})$$

1 Espérance

Exercice 1 : Une autre expression de l'espérance

Montrer que :

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$$

Théorème 1 : Propriétés de l'espérance

1. *Linéarité.* Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$

1 Espérance

Exercice 1 : Une autre expression de l'espérance

Montrer que :

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$$

Théorème 1 : Propriétés de l'espérance

1. *Linéarité.* Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y) \quad \text{et} \quad E(aX + b) = aE(X) + b$$

1 Espérance

Exercice 1 : Une autre expression de l'espérance

Montrer que :

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$$

Théorème 1 : Propriétés de l'espérance

1. *Linéarité.* Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y) \quad \text{et} \quad E(aX + b) = aE(X) + b$$

2. *Inégalité triangulaire.*

1 Espérance

Exercice 1 : Une autre expression de l'espérance

Montrer que :

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$$

Théorème 1 : Propriétés de l'espérance

1. *Linéarité.* Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y) \quad \text{et} \quad E(aX + b) = aE(X) + b$$

2. *Inégalité triangulaire.* $|E(X)| \leq E(|X|)$

1 Espérance

Exercice 1 : Une autre expression de l'espérance

Montrer que :

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$$

Théorème 1 : Propriétés de l'espérance

1. *Linéarité.* Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y) \quad \text{et} \quad E(aX + b) = aE(X) + b$$

2. *Inégalité triangulaire.* $|E(X)| \leq E(|X|)$

3. Si X et Y sont réelles

- *Positivité.*
- *Croissance.*

1 Espérance

Exercice 1 : Une autre expression de l'espérance

Montrer que :

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$$

Théorème 1 : Propriétés de l'espérance

1. *Linéarité.* Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y) \quad \text{et} \quad E(aX + b) = aE(X) + b$$

2. *Inégalité triangulaire.* $|E(X)| \leq E(|X|)$

3. Si X et Y sont réelles

- *Positivité.* Si $X \geq 0$: $E(X) \geq 0$
- *Croissance.*

1 Espérance

Exercice 1 : Une autre expression de l'espérance

Montrer que :

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$$

Théorème 1 : Propriétés de l'espérance

1. *Linéarité.* Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y) \quad \text{et} \quad E(aX + b) = aE(X) + b$$

2. *Inégalité triangulaire.* $|E(X)| \leq E(|X|)$

3. Si X et Y sont réelles

- *Positivité.* Si $X \geq 0$: $E(X) \geq 0$
- *Croissance.* Si $X \leq Y$: $E(X) \leq E(Y)$

1 Espérance

Exercice 1 : Une autre expression de l'espérance

Montrer que :

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$$

Théorème 1 : Propriétés de l'espérance

1. *Linéarité.* Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y) \quad \text{et} \quad E(aX + b) = aE(X) + b$$

2. *Inégalité triangulaire.* $|E(X)| \leq E(|X|)$

3. Si X et Y sont réelles

- *Positivité.* Si $X \geq 0$: $E(X) \geq 0$
- *Croissance.* Si $X \leq Y$: $E(X) \leq E(Y)$

Exercice 2

Démontrer le point 1 (linéarité).

1 Espérance

Exercice 1 : Une autre expression de l'espérance

Montrer que :

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$$

Théorème 1 : Propriétés de l'espérance

1. *Linéarité.* Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y) \quad \text{et} \quad E(aX + b) = aE(X) + b$$

2. *Inégalité triangulaire.* $|E(X)| \leq E(|X|)$

3. Si X et Y sont réelles

- *Positivité.* Si $X \geq 0$: $E(X) \geq 0$
- *Croissance.* Si $X \leq Y$: $E(X) \leq E(Y)$

💣 **Attention** 💣

Pour le produit, en général :

1 Espérance

Exercice 1 : Une autre expression de l'espérance

Montrer que :

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$$

Théorème 1 : Propriétés de l'espérance

1. *Linéarité.* Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y) \quad \text{et} \quad E(aX + b) = aE(X) + b$$

2. *Inégalité triangulaire.* $|E(X)| \leq E(|X|)$

3. Si X et Y sont réelles

- *Positivité.* Si $X \geq 0$: $E(X) \geq 0$
- *Croissance.* Si $X \leq Y$: $E(X) \leq E(Y)$

⚠ **Attention** ⚠

Pour le produit, en général : $E(XY) \neq E(X)E(Y)$

1 Espérance

Exercice 1 : Une autre expression de l'espérance

Montrer que :

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$$

Théorème 1 : Propriétés de l'espérance

1. *Linéarité.* Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y) \quad \text{et} \quad E(aX + b) = aE(X) + b$$

2. *Inégalité triangulaire.* $|E(X)| \leq E(|X|)$

3. Si X et Y sont réelles

- *Positivité.* Si $X \geq 0$: $E(X) \geq 0$
- *Croissance.* Si $X \leq Y$: $E(X) \leq E(Y)$

Exemple 4

On lance deux fois un dé équilibré. En moyenne, combien vaut la somme des deux résultats ?

Théorème 2 : Formule de transfert

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$. On suppose que X est à valeurs dans I . Alors :

1 Espérance

Théorème 2 : Formule de transfert

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$. On suppose que X est à valeurs dans I . Alors :

$$E(f(X)) = \sum_{k \in X(\Omega)} f(k)P(X = k)$$

1 Espérance

Théorème 2 : Formule de transfert

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$. On suppose que X est à valeurs dans I . Alors :

$$E(f(X)) = \sum_{k \in X(\Omega)} f(k)P(X = k)$$

Exercice 3

Démontrer cette formule.

1 Espérance

Théorème 2 : Formule de transfert

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$. On suppose que X est à valeurs dans I . Alors :

$$E(f(X)) = \sum_{k \in X(\Omega)} f(k)P(X = k)$$

Exemple 5 : On lance un dé équilibré

On note X le résultat obtenu. Calculer : $E(X^2)$ et $E(e^X)$.

1 Espérance

Théorème 2 : Formule de transfert

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$. On suppose que X est à valeurs dans I . Alors :

$$E(f(X)) = \sum_{k \in X(\Omega)} f(k)P(X = k)$$

Exemple 6 : Inégalité de Jensen

Soit I un intervalle, $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, concave et X une variable aléatoire à valeurs dans I .

- a) Montrer que $E(X) \in I$
- b) Montrer que : $E(f(X)) \leq f(E(X))$

2 Variance

Définition 2

- La variance de X est le réel positif :

2 Variance

Définition 2

- La variance de X est le réel positif : $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$

2 Variance

« Moyenne des carrés des écarts à la moyenne »

Définition 2

- La variance de X est le réel positif : $V(X) = E((X - E(X))^2)$

2 Variance

« Moyenne des carrés des écarts à la moyenne »

Définition 2

- La variance de X est le réel positif : $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$
- L'écart-type de X est :

2 Variance

« Moyenne des carrés des écarts à la moyenne »

Définition 2

- La variance de X est le réel positif : $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$
- L'écart-type de X est : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

2 Variance

« Moyenne des carrés des écarts à la moyenne »

Définition 2

- La variance de X est le réel positif : $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$
- L'écart-type de X est : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Théorème 3 : Propriétés de la variance

1. *Formule de Koenig-Huygens :*

2 Variance

« Moyenne des carrés des écarts à la moyenne »

Définition 2

- La variance de X est le réel positif : $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$
- L'écart-type de X est : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Théorème 3 : Propriétés de la variance

1. *Formule de Koenig-Huygens* : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

2 Variance

« Moyenne des carrés des écarts à la moyenne »

Définition 2

- La variance de X est le réel positif : $V(X) = E((X - E(X))^2)$
- L'écart-type de X est : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Théorème 3 : Propriétés de la variance

Moment d'ordre 2 de X

1. *Formule de Koenig-Huygens* : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

2 Variance

« Moyenne des carrés des écarts à la moyenne »

Définition 2

- La variance de X est le réel positif : $V(X) = E((X - E(X))^2)$
- L'écart-type de X est : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Théorème 3 : Propriétés de la variance

Moment d'ordre 2 de X

1. *Formule de Koenig-Huygens* : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$
2. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:

2 Variance

« Moyenne des carrés des écarts à la moyenne »

Définition 2

- La variance de X est le réel positif : $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$
- L'écart-type de X est : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Théorème 3 : Propriétés de la variance

Moment d'ordre 2 de X

1. *Formule de Koenig-Huygens* : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$
2. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$: $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

2 Variance

« Moyenne des carrés des écarts à la moyenne »

Définition 2

- La variance de X est le réel positif : $V(X) = E((X - E(X))^2)$
- L'écart-type de X est : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Théorème 3 : Propriétés de la variance

Moment d'ordre 2 de X

- Formule de Koenig-Huygens : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$
- Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$: $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

⚠ Attention ⚠

En général :

2 Variance

« Moyenne des carrés des écarts à la moyenne »

Définition 2

- La variance de X est le réel positif : $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$
- L'écart-type de X est : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Théorème 3 : Propriétés de la variance

Moment d'ordre 2 de X

- Formule de Koenig-Huygens : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$
- Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$: $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

⚠ Attention ⚠

En général : $V(X + Y) \neq V(X) + V(Y)$

2 Variance

« Moyenne des carrés des écarts à la moyenne »

Définition 2

- La variance de X est le réel positif : $V(X) = E((X - E(X))^2)$
- L'écart-type de X est : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Théorème 3 : Propriétés de la variance

Moment d'ordre 2 de X

- Formule de Koenig-Huygens : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$
- Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$: $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

⚠ Attention ⚠

En général : $V(X + Y) \neq V(X) + V(Y)$

Exercice 4

Démontrer les deux relations du théorème.

2 Variance

« Moyenne des carrés des écarts à la moyenne »

Définition 2

- La variance de X est le réel positif : $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$
- L'écart-type de X est : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Théorème 3 : Propriétés de la variance

Moment d'ordre 2 de X

- Formule de Koenig-Huygens : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$
- Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$: $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

⚠ Attention ⚠

En général : $V(X + Y) \neq V(X) + V(Y)$

Exemple 7 : $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ et $P(X = k) = \lambda k$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$

- a) Calculer λ . b) Calculer $E(X)$. c) Calculer $V(X)$.

2 Variance

« Moyenne des carrés des écarts à la moyenne »

Définition 2

- La variance de X est le réel positif : $V(X) = E((X - E(X))^2)$
- L'écart-type de X est : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Théorème 3 : Propriétés de la variance

Moment d'ordre 2 de X

- Formule de Koenig-Huygens : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$
- Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$: $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

⚠ Attention ⚠

En général : $V(X + Y) \neq V(X) + V(Y)$

Exemple 8 : X une variable aléatoire réelle centrée

Montrer que : $E(|X|) \leq \sqrt{V(X)}$.

2 Variance

« Moyenne des carrés des écarts à la moyenne »

Définition 2

- La variance de X est le réel positif : $V(X) = E((X - E(X))^2)$
- L'écart-type de X est : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Théorème 3 : Propriétés de la variance

Moment d'ordre 2 de X

- Formule de Koenig-Huygens : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$
- Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$: $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

⚠ Attention ⚠

En général : $V(X + Y) \neq V(X) + V(Y)$

Exercice 5 : On suppose que $V(X) \neq 0$

Montrer que $Y = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ vérifie : $E(Y) = 0$ et $V(Y) = 1$.

III Lois usuelles finies

I Loi d'une variable aléatoire

II Espérance et variance d'une variable aléatoire

III Lois usuelles finies

1 Loi uniforme

Définition 1

X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, noté $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ si :

■

■

1 Loi uniforme

Définition 1

X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, noté $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ si :

- X est à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ ▪

1 Loi uniforme

Définition 1

X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, noté $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ si :

- X est à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$
- $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(X = k) = \frac{1}{n}$

1 Loi uniforme

Définition 1

X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, noté $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ si :

- X est à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$
- $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(X = k) = \frac{1}{n}$

Espérance et variance de X :

1 Loi uniforme

Définition 1

X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, noté $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ si :

- X est à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$
- $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(X = k) = \frac{1}{n}$

Espérance et variance de X : $E(X) = \frac{n+1}{2} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$

1 Loi uniforme

Situation modèle :

« On choisit au hasard ... »

Définition 1

X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, noté $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ si :

- X est à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$
- $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(X = k) = \frac{1}{n}$

Espérance et variance de X : $E(X) = \frac{n+1}{2} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$

1 Loi uniforme

Situation modèle :

« On choisit au hasard ... »

Définition 1

X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, noté $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ si :

- X est à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$
- $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(X = k) = \frac{1}{n}$

Espérance et variance de X : $E(X) = \frac{n+1}{2} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$

Généralisation $X \sim \mathcal{U}(E)$, loi uniforme sur E , si

- X est à valeurs dans un ensemble fini E

-

1 Loi uniforme

Situation modèle :

« On choisit au hasard ... »

Définition 1

X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, noté $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ si :

- X est à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$
- $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(X = k) = \frac{1}{n}$

Espérance et variance de X : $E(X) = \frac{n+1}{2} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$

Généralisation $X \sim \mathcal{U}(E)$, loi uniforme sur E , si

- X est à valeurs dans un ensemble fini E

- $P(X \in A) = \frac{|A|}{|E|}$

1 Loi uniforme

Situation modèle :

« On choisit au hasard ... »

Définition 1

X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, noté $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ si :

- X est à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$
- $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(X = k) = \frac{1}{n}$

Espérance et variance de X : $E(X) = \frac{n+1}{2} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$

Généralisation $X \sim \mathcal{U}(E)$, loi uniforme sur E , si

- X est à valeurs dans un ensemble fini E

- $$P(X \in A) = \frac{|A|}{|E|} = \frac{\text{« nb. de cas favorables »}}{\text{« nb. de cas possibles »}}$$

1 Loi uniforme

Situation modèle :

« On choisit au hasard ... »

Définition 1

X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, noté $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ si :

- X est à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$
- $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(X = k) = \frac{1}{n}$

Espérance et variance de X : $E(X) = \frac{n+1}{2} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$

P_X est la proba. uniforme sur E

Généralisation $X \sim \mathcal{U}(E)$, loi uniforme sur E , si

- X est à valeurs dans un ensemble fini E
- $P(X \in A) = \frac{|A|}{|E|} = \frac{\text{« nb. de cas favorables »}}{\text{« nb. de cas possibles »}}$

1 Loi uniforme

Situation modèle :

« On choisit au hasard ... »

Définition 1

X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$,

- X est à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$
- $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(X = k) = \frac{1}{n}$

Espérance et variance de X :

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

P_X est la proba. uniforme sur E

Généralisation $X \sim \mathcal{U}(E)$, loi uniforme sur E , si

- X est à valeurs dans un ensemble fini E

- $$P(X \in A) = \frac{|A|}{|E|} = \frac{\text{« nb. de cas favorables »}}{\text{« nb. de cas possibles »}}$$

Loi uniforme sur E

$$X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$$

$$P(X = k) = \frac{1}{n}$$

$$X \sim \mathcal{U}(\llbracket 0, n \rrbracket)$$

$$X \sim \mathcal{U}(E)$$

1 Loi uniforme

Situation modèle :

« On choisit au hasard ... »

Définition 1

X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$,

- X est à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$
- $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(X = k) = \frac{1}{n}$

Espérance et variance de X :

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

P_X est la proba. uniforme sur E

Généralisation $X \sim \mathcal{U}(E)$, loi uniforme sur E , si

- X est à valeurs dans un ensemble fini E

- $$P(X \in A) = \frac{|A|}{|E|} = \frac{\text{« nb. de cas favorables »}}{\text{« nb. de cas possibles »}}$$

Loi uniforme sur E

$$X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$$

$$P(X = k) = \frac{1}{n}$$

$$X \sim \mathcal{U}(\llbracket 0, n \rrbracket)$$

$$P(X = k) = \frac{1}{n+1}$$

$$X \sim \mathcal{U}(E)$$

1 Loi uniforme

Situation modèle :

« On choisit au hasard ... »

Définition 1

X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$,

- X est à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$
- $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(X = k) = \frac{1}{n}$

Espérance et variance de X :

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

P_X est la proba. uniforme sur E

Généralisation $X \sim \mathcal{U}(E)$, loi uniforme sur E , si

- X est à valeurs dans un ensemble fini E

- $$P(X \in A) = \frac{|A|}{|E|} = \frac{\text{« nb. de cas favorables »}}{\text{« nb. de cas possibles »}}$$

Loi uniforme sur E

$$X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$$

$$P(X = k) = \frac{1}{n}$$

$$X \sim \mathcal{U}(\llbracket 0, n \rrbracket)$$

$$P(X = k) = \frac{1}{n+1}$$

$$X \sim \mathcal{U}(E)$$

$$P(X = k) = \frac{1}{|E|}$$

1 Loi uniforme

Situation modèle :

« On choisit au hasard ... »

Définition 1

X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$,

- X est à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$
- $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(X = k) = \frac{1}{n}$

Espérance et variance de X :

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

P_X est la proba. uniforme sur E

Généralisation $X \sim \mathcal{U}(E)$, loi uniforme sur E , si

- X est à valeurs dans un ensemble fini E

- $$P(X \in A) = \frac{|A|}{|E|} = \frac{\text{« nb. de cas favorables »}}{\text{« nb. de cas possibles »}}$$

Loi uniforme sur E

$$X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$$

$$P(X = k) = \frac{1}{n}$$

$$X \sim \mathcal{U}(\llbracket 0, n \rrbracket)$$

$$P(X = k) = \frac{1}{n+1}$$

$$X \sim \mathcal{U}(E)$$

$$P(X = k) = \frac{1}{|E|}$$

Exercice 1

Démontrer la formule donnant $E(X)$, et calculer $V(X)$

1 Loi uniforme

Exemple 1 : Combien en moyenne doit-il essayer de clés ?

Un gardien possède n clés et doit ouvrir une porte dans le noir. On suppose qu'il n'utilise jamais deux fois la même clé.

1 Loi uniforme

Exemple 1 : Combien en moyenne doit-il essayer de clés ?

Un gardien possède n clés et doit ouvrir une porte dans le noir. On suppose qu'il n'utilise jamais deux fois la même clé.

Exemple 2 : $X_n \sim \mathcal{U}([1, n])$

Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Déterminer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} E\left(f\left(\frac{X_n}{n}\right)\right).$

1 Loi uniforme

Exemple 1 : Combien en moyenne doit-il essayer de clés ?

Un gardien possède n clés et doit ouvrir une porte dans le noir. On suppose qu'il n'utilise jamais deux fois la même clé.

Exemple 2 : $X_n \sim \mathcal{U}([1, n])$

Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Déterminer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} E\left(f\left(\frac{X_n}{n}\right)\right)$.

Exemple 3 : Calculer : $E(Z)$ et $E(\arg Z)$

La variable Z suit la loi uniforme sur $\mathbb{U}_n$ où $n \geq 2$

1 Loi uniforme

Exemple 1 : Combien en moyenne doit-il essayer de clés ?

Un gardien possède n clés et doit ouvrir une porte dans le noir.

On suppose que $Z \sim \mathcal{U}(\mathbb{U}_n)$ signifie: jamais deux fois la même clé.

Exemple 2 : $X_n \sim \mathcal{U}([1, n])$

Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Déterminer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} E\left(f\left(\frac{X_n}{n}\right)\right)$.

Exemple 3 : Calculer : $E(Z)$ et $E(\arg Z)$

La variable Z suit la loi uniforme sur $\mathbb{U}_n$ où $n \geq 2$

1 Loi uniforme

Exemple 1 : Combien en moyenne doit-il essayer de clés ?

Un gardien possède n clés et doit ouvrir une porte dans le noir.

On suppose qu'il n'essaie jamais deux fois la même clé.

- Z est à valeurs dans $\{\omega_0, \dots, \omega_{n-1}\}$

Exemple 2 : $X_n \sim \mathcal{U}([1, n])$

Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Déterminer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} E\left(f\left(\frac{X_n}{n}\right)\right)$.

Exemple 3 : Calculer : $E(Z)$ et $E(\arg Z)$

La variable Z suit la loi uniforme sur $\mathbb{U}_n$ où $n \geq 2$

1 Loi uniforme

Exemple 1 : Combien en moyenne doit-il essayer de clés ?

Un gardien possède n clés et doit ouvrir une porte dans le noir.

On suppose qu'il ne choisit jamais deux fois la même clé.

▪ $Z \sim \mathcal{U}(\mathbb{U}_n)$ signifie:

- Z est à valeurs dans $\{\omega_0, \dots, \omega_{n-1}\}$

Exemple 2 : $X_n \sim \mathcal{U}([1, n])$

- $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, P(Z = \omega_k) = \frac{1}{n}$

Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Déterminer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} E\left(f\left(\frac{X_n}{n}\right)\right)$.

Exemple 3 : Calculer : $E(Z)$ et $E(\arg Z)$

La variable Z suit la loi uniforme sur $\mathbb{U}_n$ où $n \geq 2$

Définition 2

X suit la loi de Bernoulli de paramètre p , noté $X \sim \mathcal{B}(p)$ si :

Définition 2

X suit la loi de Bernoulli de paramètre p , noté $X \sim \mathcal{B}(p)$ si :

- X est à valeurs dans $\{0, 1\}$

Définition 2

X suit la loi de Bernoulli de paramètre p , noté $X \sim \mathcal{B}(p)$ si :

- X est à valeurs dans $\{0, 1\}$
- $P(X = 1) = p$

Définition 2

X suit la loi de Bernoulli de paramètre p , noté $X \sim \mathcal{B}(p)$ si :

- X est à valeurs dans $\{0, 1\}$
- $P(X = 1) = p$ et donc $P(X = 0) = 1 - p$

Espérance et variance de X :

2 Loi de Bernoulli

Définition 2

X suit la loi de Bernoulli de paramètre p , noté $X \sim \mathcal{B}(p)$ si :

- X est à valeurs dans $\{0, 1\}$
- $P(X = 1) = p$ et donc $P(X = 0) = 1 - p$

Espérance et variance de X :

$$E(X) = p \quad V(X) = p(1 - p)$$

2 Loi de Bernoulli

Indicateur de succès :
« $X = 1$ si ... et 0 sinon »

Définition 2

X suit la loi de Bernoulli de paramètre p , noté $X \sim \mathcal{B}(p)$ si :

- X est à valeurs dans $\{0, 1\}$
- $P(X = 1) = p$ et donc $P(X = 0) = 1 - p$

Espérance et variance de X :

$$E(X) = p \quad V(X) = p(1 - p)$$

2 Loi de Bernoulli

Indicateur de succès :
« $X = 1$ si ... et 0 sinon »

Définition 2

X suit la loi de Bernoulli de paramètre p , noté $X \sim \mathcal{B}(p)$ si :

- X est à valeurs dans $\{0, 1\}$
- $P(X = 1) = p$ et donc $P(X = 0) = 1 - p$

Espérance et variance de X :

$$E(X) = p \quad V(X) = p(1 - p)$$

Exercice 2

Démontrer les formules sur l'espérance et la variance.

Définition 3

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $A \subset \Omega$.

L'*indicatrice de l'événement* A est la variable aléatoire $\mathbb{1}_A$.

■

■

Définition 3

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $A \subset \Omega$.

L'*indicatrice de l'événement* A est la variable aléatoire $\mathbb{1}_A$.

- $\mathbb{1}_A \sim \mathcal{B}(p)$

▪

Définition 3

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $A \subset \Omega$.

L'*indicatrice de l'événement* A est la variable aléatoire $\mathbb{1}_A$.

$$\blacksquare \mathbb{1}_A \sim \mathcal{B}(p) \quad \text{où :} \quad p = P(A) \quad \blacksquare$$

Définition 3

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $A \subset \Omega$.

L'*indicatrice de l'événement* A est la variable aléatoire $\mathbb{1}_A$.

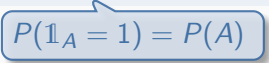
$$\blacksquare \mathbb{1}_A \sim \mathcal{B}(p) \quad \text{où :} \quad p = P(A) \quad \blacksquare P(A) = E(\mathbb{1}_A)$$

Définition 3

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $A \subset \Omega$.

L'*indicatrice* de l'événement A est la variable aléatoire $\mathbb{1}_A$.

- $\mathbb{1}_A \sim \mathcal{B}(p)$ où : $p = P(A)$ ▪ $P(A) = E(\mathbb{1}_A)$


$$P(\mathbb{1}_A = 1) = P(A)$$

Définition 3

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $A \subset \Omega$.

L'indicatrice de l'événement A est la variable aléatoire $\mathbb{1}_A$.

$$\blacksquare \mathbb{1}_A \sim \mathcal{B}(p) \quad \text{où :} \quad p = P(A) \quad \blacksquare P(A) = E(\mathbb{1}_A)$$

$$P(\mathbb{1}_A = 1) = P(A)$$

Exemple 4 : On lance n fois une dé.

Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note A_i l'événement « Le i^{e} lancer vaut 6 ».

Que représente la variable $S_n = \mathbb{1}_{A_1} + \cdots + \mathbb{1}_{A_n}$?

Définition 3

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $A \subset \Omega$.

L'*indicatrice de l'événement* A est la variable aléatoire $\mathbb{1}_A$.

$$\blacksquare \mathbb{1}_A \sim \mathcal{B}(p) \quad \text{où :} \quad p = P(A) \quad \blacksquare P(A) = E(\mathbb{1}_A)$$

Exemple 5 : $\sigma \sim \mathcal{U}(S_n)$

- a) On note A_i l'événement $\{\sigma(i) = i\}$. Calculer $P(A_i)$.
- b) On note F le nombre de points fixes de σ . Calculer $E(F)$

2 Loi de Bernoulli

$\sigma \sim \mathcal{U}(S_n)$ signifie :

- σ est à valeurs dans S_n

Définition 3

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $A \subset \Omega$.

L'indicatrice de l'événement A est la variable aléatoire $\mathbb{1}_A$.

- $\mathbb{1}_A \sim \mathcal{B}(p)$ où : $p = P(A)$ ▪ $P(A) = E(\mathbb{1}_A)$

Exemple 5 : $\sigma \sim \mathcal{U}(S_n)$

- On note A_i l'événement $\{\sigma(i) = i\}$. Calculer $P(A_i)$.
- On note F le nombre de points fixes de σ . Calculer $E(F)$

2 Loi de Bernoulli

$\sigma \sim \mathcal{U}(S_n)$ signifie :

- σ est à valeurs dans S_n
- $P(\sigma \in A) = \frac{\text{nb. de permutations de } A}{n!}$

Définition

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $A \subset \Omega$.

L'indicatrice de l'événement A est la variable aléatoire $\mathbb{1}_A$.

- $\mathbb{1}_A \sim \mathcal{B}(p)$ où : $p = P(A)$
- $P(A) = E(\mathbb{1}_A)$

Exemple 5 : $\sigma \sim \mathcal{U}(S_n)$

- On note A_i l'événement $\{\sigma(i) = i\}$. Calculer $P(A_i)$.
- On note F le nombre de points fixes de σ . Calculer $E(F)$

Définition 3

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $A \subset \Omega$.

L'*indicatrice de l'événement* A est la variable aléatoire $\mathbb{1}_A$.

$$\blacksquare \mathbb{1}_A \sim \mathcal{B}(p) \quad \text{où :} \quad p = P(A) \quad \blacksquare P(A) = E(\mathbb{1}_A)$$

Exemple 6 : Mines 2018

On suppose que X est à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Montrer que pour tout $m \in \llbracket 1, n \rrbracket$: $E(X) \leq m - 1 + nP(X \geq m)$.

3 Loi binomiale

Définition 4

X suit la loi binomiale de paramètre (n, p) , noté $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ si :

3 Loi binomiale

Définition 4

X suit la loi binomiale de paramètre (n, p) , noté $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ si :

- X est à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$

3 Loi binomiale

Définition 4

X suit la loi binomiale de paramètre (n, p) , noté $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ si :

- X est à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$
- $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$

3 Loi binomiale

Définition 4

X suit la loi binomiale de paramètre (n, p) , noté $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ si :

- X est à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$
- $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$

Espérance et variance de X :

3 Loi binomiale

Définition 4

X suit la loi binomiale de paramètre (n, p) , noté $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ si :

- X est à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$
- $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$

Espérance et variance de X : $E(X) = np \quad V(X) = np(1 - p)$

3 Loi binomiale

X compte le nombre de « succès » sur n répétitions :

Définition 4

X suit la loi binomiale de paramètre (n, p) , noté $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ si :

- X est à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$
- $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$

Espérance et variance de X : $E(X) = np \quad V(X) = np(1 - p)$

3 Loi binomiale

X compte le nombre de « succès » sur n répétitions :

- Les n répétition sont indépendantes

Définition 4

X suit la loi binomiale de paramètre (n, p) , noté $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ si :

- X est à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$
- $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$

Espérance et variance de X : $E(X) = np \quad V(X) = np(1 - p)$

3 Loi binomiale X compte le nombre de « succès » sur n répétitions :

- Les n répétitions sont indépendantes
- A chaque répétition, succès avec probabilité p

X suit la loi binomiale de paramètre (n, p) , noté $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ si :

- X est à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$
- $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$

Espérance et variance de X : $E(X) = np \quad V(X) = np(1 - p)$

3 L X compte le nombre de « succès » sur n répétitions :

- Les n répétition sont indépendantes
- A chaque répétition, succès avec probabilité p

X suit la loi binomiale de paramètre (n, p) , noté $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ si :

- X est à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$
- $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$

Espérance et variance de X : $E(X) = np \quad V(X) = np(1 - p)$

Exercice 3

1. Vérifier que les relations de la définition ci-dessus définissent une distribution de probabilité.
2. Démontrer la formule donnant l'espérance de la loi $\mathcal{B}(n, p)$.