

Séries

Chapitre 30

Dans tout le chapitre

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une suite complexe.

Dans tout le chapitre

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une suite complexe.

Objectif

- Définir : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \stackrel{?}{=}$

Dans tout le chapitre

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une suite complexe.

Objectif ?

- Définir :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N u_n$$

Dans tout le chapitre

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une suite complexe.

Objectif

- Définir :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N u_n$$

Condition sur $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$
pour que la limite existe

I Généralités

I Généralités

II Séries à termes positifs

III Nature d'une série dans le cas général

1 Vocabulaire sur les séries

Définition 1

- La *série de terme général* u_n est la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

1 Vocabulaire sur les séries

Définition 1

- La *série de terme général* u_n est

la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k$

1 Vocabulaire sur les séries

Définition 1

- La *série de terme général* u_n est la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est la n^{e} *somme partielle* de la série.
Retenir :

1 Vocabulaire sur les séries

Définition 1

- La *série de terme général* u_n est la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est la n^{e} *somme partielle* de la série.
Retenir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = S_n - S_{n-1}$

1 Vocabulaire sur les séries

Définition 1

« La série $\sum u_n$ »

- La *série de terme général* u_n est la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est la n^{e} *somme partielle* de la série.

Retenir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = S_n - S_{n-1}$

1 Vocabulaire sur les séries

Définition 1

« La série $\sum u_n$ »

- La *série de terme général* u_n est la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est la n^{e} *somme partielle* de la série.

Retenir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = S_n - S_{n-1}$

Définition 2

On suppose que la série $\sum u_n$ converge.

1 Vocabulaire sur les séries

Définition 1

« La série $\sum u_n$ »

- La *série de terme général* u_n est la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est la n^{e} *somme partielle* de la série.

Retenir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = S_n - S_{n-1}$

Définition 2

i.e. la suite (S_n) converge

On suppose que la série $\sum u_n$ converge.

1 Vocabulaire sur les séries

Définition 1

« La série $\sum u_n$ »

- La *série de terme général* u_n est la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est la n^{e} *somme partielle* de la série.

Retenir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = S_n - S_{n-1}$

Définition 2

i.e. la suite (S_n) converge

On suppose que la série $\sum u_n$ converge.

- La *somme* de la série :

1 Vocabulaire sur les séries

Définition 1

« La série $\sum u_n$ »

- La *série de terme général* u_n est la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est la n^{e} *somme partielle* de la série.

Retenir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = S_n - S_{n-1}$

Définition 2

i.e. la suite (S_n) converge

On suppose que la série $\sum u_n$ converge.

- La *somme* de la série : la limite finie $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$, notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

1 Vocabulaire sur les séries

Définition 1

« La série $\sum u_n$ »

- La *série de terme général* u_n est la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est la n^{e} *somme partielle* de la série.

Retenir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = S_n - S_{n-1}$

Définition 2

i.e. la suite (S_n) converge

On suppose que la série $\sum u_n$ converge.

- La *somme* de la série : la *limite finie* $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$, notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$
- Le n^{e} *reste* de la série :

Retenir :

1 Vocabulaire sur les séries

Définition 1

« La série $\sum u_n$ »

- La *série de terme général* u_n est la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est la n^{e} *somme partielle* de la série.

Retenir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = S_n - S_{n-1}$

Définition 2

i.e. la suite (S_n) converge

On suppose que la série $\sum u_n$ converge.

- La *somme* de la série : la limite finie $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$, notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$
- Le n^{e} *reste* de la série : $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$

Retenir :

1 Vocabulaire sur les séries

Définition 1

« La série $\sum u_n$ »

- La *série de terme général* u_n est la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est la n^{e} *somme partielle* de la série.

Retenir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = S_n - S_{n-1}$

Définition 2

i.e. la suite (S_n) converge

On suppose que la série $\sum u_n$ converge.

- La *somme* de la série : la limite finie $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$, notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$
- Le n^{e} *reste* de la série : $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$

Retenir :

$$= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^N u_k$$

1 Vocabulaire sur les séries

Définition 1

« La série $\sum u_n$ »

- La *série de terme général* u_n est la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est la n^{e} *somme partielle* de la série.

Retenir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = S_n - S_{n-1}$

Définition 2

i.e. la suite (S_n) converge

On suppose que la série $\sum u_n$ converge.

- La *somme* de la série : la limite finie $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$, notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$
- Le n^{e} *reste* de la série : $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$

Retenir : $R_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

$$= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^N u_k$$

1 Vocabulaire sur les séries

⚠ **Attention** ⚠ Ne pas confondre les notations

$$\sum u_n \quad \neq \quad \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

1 Vocabulaire sur les séries



Attention

La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ confondre les notations

$$\sum u_n$$



$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

1 Vocabulaire sur les séries



Attention

La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne confondre pas les notations

La limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

$$\sum u_n$$



$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

1 Vocabulaire sur les séries



Attention

La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne confondre pas les notations

La limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

$$\sum u_n$$



$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Théorème 1 : Opérations sur les séries

- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors :

1 Vocabulaire sur les séries



Attention

La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne confondre pas les notations

La limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

$$\sum u_n$$



$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Théorème 1 : Opérations sur les séries

- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors : $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge

1 Vocabulaire sur les séries



Attention

La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne confondre pas les notations

La limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

$$\sum u_n$$



$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Théorème 1 : Opérations sur les séries

- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors : $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge
- Si $\sum u_n$ est convergente et $\sum v_n$ divergente :

1 Vocabulaire sur les séries



Attention

La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne confondre pas

La limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

$$\sum u_n$$



$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Théorème 1 : Opérations sur les séries

- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors : $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge
- Si $\sum u_n$ est convergente et $\sum v_n$ divergente : $\sum(u_n + v_n)$ est divergente

2 Premiers exemples classiques

Théorème 1 : Opérations sur les séries

- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors : $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge
- Si $\sum u_n$ est convergente et $\sum v_n$ divergente : $\sum(u_n + v_n)$ est divergente

Théorème 2 : Série exponentielle

Soit $z \in \mathbb{C}$. La *série exponentielle* $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge et :

2 Premiers exemples classiques

Théorème 1 : Opérations sur les séries

- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors : $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge
- Si $\sum u_n$ est convergente et $\sum v_n$ divergente : $\sum(u_n + v_n)$ est divergente

Théorème 2 : Série exponentielle

Soit $z \in \mathbb{C}$. La *série exponentielle* $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge et : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$

2 Premiers exemples classiques

Théorème 1 : Opérations sur les séries

- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors : $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge
- Si $\sum u_n$ est convergente et $\sum v_n$ divergente : $\sum(u_n + v_n)$ est divergente

Théorème 2 : Série exponentielle

Soit $z \in \mathbb{C}$. La *série exponentielle* $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge et : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$

Théorème 3 : Séries géométriques

Soit $q \in \mathbb{C}$. La *série géométrique* $\sum q^k$ converge ssi :

2 Premiers exemples classiques

Théorème 1 : Opérations sur les séries

- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors : $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge
- Si $\sum u_n$ est convergente et $\sum v_n$ divergente : $\sum(u_n + v_n)$ est divergente

Théorème 2 : Série exponentielle

Soit $z \in \mathbb{C}$. La *série exponentielle* $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge et : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$

Théorème 3 : Séries géométriques

Soit $q \in \mathbb{C}$. La *série géométrique* $\sum q^k$ converge ssi : $|q| < 1$.

2 Premiers exemples classiques

Théorème 1 : Opérations sur les séries

- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors : $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge
- Si $\sum u_n$ est convergente et $\sum v_n$ divergente : $\sum(u_n + v_n)$ est divergente

Théorème 2 : Série exponentielle

Soit $z \in \mathbb{C}$. La *série exponentielle* $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge et : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$

Théorème 3 : Séries géométriques

Soit $q \in \mathbb{C}$. La *série géométrique* $\sum q^k$ converge ssi : $|q| < 1$.

Dans ce cas $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$.

2 Premiers exemples classiques

Théorème 2 : Série exponentielle

Soit $z \in \mathbb{C}$. La *série exponentielle* $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge et : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$

Théorème 3 : Séries géométriques

Soit $q \in \mathbb{C}$. La *série géométrique* $\sum q^k$ converge ssi : $|q| < 1$.

Dans ce cas $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$.

Exercice 1

Démontrer le théorème 3.

2 Premiers exemples classiques

Théorème 4 : Séries télescopiques

La série $\sum (v_{n+1} - v_n)$ converge ssi :

2 Premiers exemples classiques

Théorème 4 : Séries télescopiques

La série $\sum (v_{n+1} - v_n)$ converge ssi : la suite (v_n) converge.

2 Premiers exemples classiques

Théorème 4 : Séries télescopiques

La série $\sum (v_{n+1} - v_n)$ converge ssi : la suite (v_n) converge.

Exercice 2

Démontrer le théorème.

2 Premiers exemples classiques

Théorème 4 : Séries télescopiques

La série $\sum (v_{n+1} - v_n)$ converge ssi : la suite (v_n) converge.

Exemple 1 : Etudier la nature

a) $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ b) $\sum \frac{1}{n^2}$ c) $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ d) $\sum \frac{1}{n}$

2 Premiers exemples classiques

Théorème 5 : Séries alternées

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, décroissante de limite nulle.

La *série alternée* :

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

■

■

2 Premiers exemples classiques

Théorème 5 : Séries alternées

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, décroissante de limite nulle.

La *série alternée* : $\sum (-1)^n a_n$ est convergente.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

■

■

2 Premiers exemples classiques

Théorème 5 : Séries alternées

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, décroissante de limite nulle.

La série alternée : $\sum (-1)^n a_n$ est convergente.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

■

■

2 Premiers exemples classiques

Théorème 5 : Séries alternées

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, décroissante de limite nulle.

La série alternée : $\sum (-1)^n a_n$ est convergente.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

■

■

2 Premiers exemples classiques

Théorème 5 : Séries alternées

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, décroissante de limite nulle.

La série alternée : $\sum (-1)^n a_n$ est convergente.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\blacksquare \quad |R_n| \leq a_{n+1} \quad \blacksquare$$

2 Premiers exemples classiques

Théorème 5 : Séries alternées

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, décroissante de limite nulle.

La série alternée : $\sum (-1)^n a_n$ est convergente.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $|R_n| \leq a_{n+1}$
- R_n est du signe de $(-1)^{n+1}$

2 Premiers exemples classiques

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k$$

Théorème 5 : Séries alternées

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, décroissante de limite nulle.

La série alternée : $\sum (-1)^n a_n$ est convergente.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $|R_n| \leq a_{n+1}$
- R_n est du signe de $(-1)^{n+1}$

2 Premiers exemples classiques

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k$$

Théorème 5 : Séries alternées

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, décroissante de limite nulle.

La série alternée : $\sum (-1)^n a_n$ est convergente.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $|R_n| \leq a_{n+1}$
- R_n est du signe de $(-1)^{n+1}$

Exercice 3 : Figure

Etablir ce résultat en montrant que $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

2 Premiers exemples classiques

Théorème 6

Si la série $\sum u_n$ converge, alors :

2 Premiers exemples classiques

Théorème 6

Si la série $\sum u_n$ converge, alors : $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

2 Premiers exemples classiques

Théorème 6

Si la série $\sum u_n$ converge, alors : $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Exercice 4

Démontrer ce théorème.

2 Premiers exemples classiques

Théorème 6

Si la série $\sum u_n$ converge, alors : $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

⚠ Attention ⚠

$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ n'assure **jamais** que la série $\sum u_n$ converge.

Par exemple :

2 Premiers exemples classiques

Théorème 6

Si la série $\sum u_n$ converge, alors : $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

⚠ Attention ⚠

$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ n'assure **jamais** que la série $\sum u_n$ converge.

Par exemple : $\sum \frac{1}{n}$ DV alors que : $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

2 Premiers exemples classiques

Théorème 6

Si la série $\sum u_n$ converge, alors : $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

⚠ Attention ⚠

$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ n'assure **jamais** que la série $\sum u_n$ converge.

Par exemple : $\sum \frac{1}{n}$ DV alors que : $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Divergence grossière

Exemple 2 : Etudier la nature de $\sum u_n$

a) $u_n = \frac{n}{3n+2}$

b) $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

c) $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

3 Comparaison série-intégrale

Exemple 3

a) Montrer que $\sum \frac{1}{n \ln n}$ diverge

b) On pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Montrer que : $R_n \sim \frac{1}{n}$

3 Comparaison série-intégrale

Exemple 3

a) Montrer que $\sum \frac{1}{n \ln n}$ diverge

b) On pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Montrer que : $R_n \sim \frac{1}{n}$

Théorème 7

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$

3 Comparaison série-intégrale

Exemple 3

a) Montrer que $\sum \frac{1}{n \ln n}$ diverge

b) On pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Montrer que : $R_n \sim \frac{1}{n}$

Théorème 7

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

La *série de Riemann* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

3 Comparaison série-intégrale

Exemple 3

a) Montrer que $\sum \frac{1}{n \ln n}$ diverge

b) On pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Montrer que : $R_n \sim \frac{1}{n}$

Théorème 7

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

La *série de Riemann* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 5

Démontrer le théorème à l'aide d'une comparaison série-intégrale.

3 Comparaison série-intégrale

Exemple 3

a) Montrer que $\sum \frac{1}{n \ln n}$ diverge

b) On pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Montrer que : $R_n \sim \frac{1}{n}$

Théorème 7

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

La *série de Riemann* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \underset{\textcircled{2}}{\leq} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \underset{\textcircled{1}}{\leq} \frac{1}{k^\alpha}$$

Exercice 5

Démontrer le théorème à l'aide d'une comparaison série-intégrale.

II Séries à termes positifs

I Généralités

II Séries à termes positifs

III Nature d'une série dans le cas général

1 Sommes partielles d'une série à termes positifs

Théorème 1

On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes positifs.

La série $\sum u_n$ converge ssi :

1 Sommes partielles d'une série à termes positifs

Théorème 1

On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes positifs.

La série $\sum u_n$ converge ssi : elle est majorée

1 Sommes partielles d'une série à termes positifs

ie si les sommes partielles
sont majorées

Théorème 1

On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes positifs.

La série $\sum u_n$ converge ssi : elle est majorée

1 Sommes partielles d'une série à termes positifs

ie si les sommes partielles
sont majorées

Théorème 1

On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes positifs.

La série $\sum u_n$ converge ssi : elle est majorée

Exercice 1

Démontrer le théorème.

2 Critères de convergence par comparaison

Théorème 2 : Comparaison par des inégalités

On suppose qu'à *partir d'un certain rang*, $0 \leq u_n \leq v_n$.

2 Critères de convergence par comparaison

Théorème 2 : Comparaison par des inégalités

On suppose qu'à *partir d'un certain rang*, $0 \leq u_n \leq v_n$.

- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

2 Critères de convergence par comparaison

Théorème 2 : Comparaison par des inégalités

On suppose qu'à partir d'un certain rang, $0 \leq u_n \leq v_n$.

- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
- Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

2 Critères de convergence par comparaison

Théorème 2 : Comparaison par des inégalités

On suppose qu'à partir d'un certain rang, $0 \leq u_n \leq v_n$.

- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
- Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Exercice 2

Démontrer le théorème dans le cas où $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2 Critères de convergence par comparaison

Théorème 2 : Comparaison par des inégalités

On suppose qu'à partir d'un certain rang, $0 \leq u_n \leq v_n$.

- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
- Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Exemple 1 : Etudier la nature de la série

a) $\sum \frac{\text{th } n}{n^2 + 1}$

2 Critères de convergence par comparaison

Théorème 2 : Comparaison par des inégalités

On suppose qu'à partir d'un certain rang, $0 \leq u_n \leq v_n$.

- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
- Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Exemple 1 : Etudier la nature de la série

a) $\sum \frac{\operatorname{th} n}{n^2 + 1}$

b) $\sum \frac{e^{\cos n}}{n}$

2 Critères de convergence par comparaison

Théorème 3 : Comparaison par des équivalents

On suppose qu'à partir d'un certain rang, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$.

Si $u_n \sim v_n$ alors :

2 Critères de convergence par comparaison

Théorème 3 : Comparaison par des équivalents

On suppose qu'à partir d'un certain rang, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$.

Si $u_n \sim v_n$ alors : les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature

2 Critères de convergence par comparaison

l'une CV ssi l'autre CV

Théorème 3 : Comparaison par des équivalents

On suppose qu'à partir d'un certain rang, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$.

Si $u_n \sim v_n$ alors : les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature

2 Critères de convergence par comparaison

l'une CV ssi l'autre CV

Théorème 3 : Comparaison par des équivalents

On suppose qu'à partir d'un certain rang, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$.
Si $u_n \sim v_n$ alors : les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature

Exercice 3 : Ex. 7.1, banque INP

Démontrer le théorème dans le cas où $u_n \geq 0$ et $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2 Critères de convergence par comparaison

l'une CV ssi l'autre CV

Théorème 3 : Comparaison par des équivalents

On suppose qu'à partir d'un certain rang, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$.

Si $u_n \sim v_n$ alors : les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature

Exemple 2 : Etudier la nature de $\sum u_n$

a) $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$

2 Critères de convergence par comparaison

l'une CV ssi l'autre CV

Théorème 3 : Comparaison par des équivalents

On suppose qu'à partir d'un certain rang, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$.

Si $u_n \sim v_n$ alors : les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature

Exemple 2 : Etudier la nature de $\sum u_n$

a) $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$

b) $u_n = \sin\left(\frac{1}{n - \sqrt{n}}\right)$

2 Critères de convergence par comparaison

l'une CV ssi l'autre CV

Théorème 3 : Comparaison par des équivalents

On suppose qu'à partir d'un certain rang, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$.
Si $u_n \sim v_n$ alors : les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature

Exemple 2 : Etudier la nature de $\sum u_n$

a) $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$

b) $u_n = \sin\left(\frac{1}{n - \sqrt{n}}\right)$

c) $u_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}$

2 Critères de convergence par comparaison

l'une CV ssi l'autre CV

Théorème 3 : Comparaison par des équivalents

On suppose qu'à partir d'un certain rang, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$.
Si $u_n \sim v_n$ alors : les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature

Exemple 3 : Montrer que la suite (u_n) converge

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$u_n = \ln n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

2 Critères de convergence par comparaison

Rappel sur les « grands O »

▪ **Rappel.** $u_n = O(v_n)$ signifie :

▪ **Exemples.**

a) $2n = O(\quad)$ b) $\sin(n^2) = O(\quad)$ c) $\frac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}} = O(\quad)$

▪ **Dans un DL.**

a) $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} =$

b) $\ln(1 + \frac{1}{n}) =$

2 Critères de convergence par comparaison

Rappel sur les « grands O »

- **Rappel.** $u_n = O(v_n)$ signifie : la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée

- **Exemples.**

a) $2n = O(\quad)$ b) $\sin(n^2) = O(\quad)$ c) $\frac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}} = O(\quad)$

- **Dans un DL.**

a) $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} =$

b) $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) =$

2 Critères de convergence par comparaison

Rappel sur les « grands O »

- **Rappel.** $u_n = O(v_n)$ signifie : la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée

- **Exemples.**

a) $2n = O(\quad)$ b) $\sin(n^2) = O(\quad)$ c) $\frac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}} = O(\quad)$

- **Dans un DL.**

a) $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} =$

b) $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) =$

2 Critères de convergence par comparaison

Rappel sur les « grands O »

- **Rappel.** $u_n = O(v_n)$ signifie : la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée

- **Exemples.**

a) $2n = O(n)$ b) $\sin(n^2) = O(1)$ c) $\frac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}} = O\left(\frac{1}{n}\right)$

- **Dans un DL.**

a) $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} =$

b) $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) =$

2 Critères de convergence par comparaison

Rappel sur les « grands O »

- **Rappel.** $u_n = O(v_n)$ signifie : la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée

- **Exemples.**

a) $2n = O(n)$ b) $\sin(n^2) = O(1)$ c) $\frac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}} = O\left(\frac{1}{n}\right)$

- **Dans un DL.**

a) $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} =$

b) $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) =$

2 Critères de convergence par comparaison

Rappel sur les « grands O »

- **Rappel.** $u_n = O(v_n)$ signifie : la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée

- **Exemples.**

a) $2n = O(n)$ b) $\sin(n^2) = O(1)$ c) $\frac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}} = O\left(\frac{1}{n}\right)$

- **Dans un DL.**

a) $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} =$

b) $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) =$

2 Critères de convergence par comparaison

Rappel sur les « grands O »

- **Rappel.** $u_n = O(v_n)$ signifie : la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée
- **Exemples.**
 - a) $2n = O(n)$ b) $\sin(n^2) = O(1)$ c) $\frac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}} = O\left(\frac{1}{n}\right)$
- **Dans un DL.**
 - a) $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$
 - b) $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) =$

2 Critères de convergence par comparaison

Rappel sur les « grands O »

- **Rappel.** $u_n = O(v_n)$ signifie : la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée

- **Exemples.**

a) $2n = O(n)$

b) $\sin(n^2) = O(1)$

c) $\frac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}} = O\left(\frac{1}{n}\right)$

- **Dans un DL.**

a) $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

b) $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) =$

$= O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

2 Critères de convergence par comparaison

Rappel sur les « grands O »

- **Rappel.** $u_n = O(v_n)$ signifie : la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée

- **Exemples.**

a) $2n = O(n)$

b) $\sin(n^2) = O(1)$

c) $\frac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}} = O\left(\frac{1}{n}\right)$

- **Dans un DL.**

a) $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

b) $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) =$

2 Critères de convergence par comparaison

Rappel sur les « grands O »

▪ **Rappel.** $u_n = O(v_n)$ signifie : la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée

▪ **Exemples.**

a) $2n = O(n)$

b) $\sin(n^2) = O(1)$

c) $\frac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}} = O\left(\frac{1}{n}\right)$

▪ **Dans un DL.**

a) $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

b) $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

$= O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

2 Critères de convergence par comparaison

Rappel sur les « grands O »

▪ **Rappel.** $u_n = O(v_n)$ signifie : la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée

▪ **Exemples.**

a) $2n = O(n)$

b) $\sin(n^2) = O(1)$

c) $\frac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}} = O\left(\frac{1}{n}\right)$

▪ **Dans un DL.**

a) $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

b) $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

$= O\left(\frac{1}{n^3}\right)$

2 Critères de convergence par comparaison

Rappel sur les « grands O »

▪ **Rappel.** $u_n = O(v_n)$ signifie : la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée

▪ **Exemples.**

a) $2n = O(n)$

b) $\sin(n^2) = O(1)$

c) $\frac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}} = O\left(\frac{1}{n}\right)$

▪ **Dans un DL.**

a) $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

b) $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$

$= O\left(\frac{1}{n^3}\right)$

2 Critères de convergence par comparaison

Théorème 4 : Comparaison par des grands O /petits o

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

i)

ii)

iii)

Alors :

2 Critères de convergence par comparaison

Théorème 4 : Comparaison par des grands O /petits o

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

i) $APCR$, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$ ii) iii)

Alors :

2 Critères de convergence par comparaison

Théorème 4 : Comparaison par des grands O /petits o

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

- i) APCR, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$ ii) $u_n = O(v_n)$ iii)

Alors :

2 Critères de convergence par comparaison

ou $u_n = o(v_n)$

Théorème 4 : Comparaison par des grands O /petits o

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

- i) APCR, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$ ii) $u_n = O(v_n)$ iii)

Alors :

2 Critères de convergence par comparaison

ou $u_n = o(v_n)$

Théorème 4 : Comparaison par des grands O /petits o

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

- i) APCR, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$ ii) $u_n = O(v_n)$ iii) $\sum v_n$ CV

Alors :

2 Critères de convergence par comparaison

ou $u_n = o(v_n)$

Théorème 4 : Comparaison par des grands O /petits o

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

- i) APCR, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$ ii) $u_n = O(v_n)$ iii) $\sum v_n$ CV

Alors : $\sum u_n$ converge.

2 Critères de convergence par comparaison

vrai aussi si
APCR, $u_n \leq 0$ et $v_n \leq 0$

ou $u_n = o(v_n)$

Théorème 4 : Comparaison par des grands O /petits o

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

- i) APCR, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$ ii) $u_n = O(v_n)$ iii) $\sum v_n$ CV

Alors : $\sum u_n$ converge.

2 Critères de convergence par comparaison

vrai aussi si
APCR, $u_n \leq 0$ et $v_n \leq 0$

ou $u_n = o(v_n)$

Théorème 4 : Comparaison par des grands O /petits o

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

- i) APCR, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$ ii) $u_n = O(v_n)$ iii) $\sum v_n$ CV

Alors : $\sum u_n$ converge.

Exercice 4

Démontrer le théorème.

2 Critères de convergence par comparaison

vrai aussi si
APCR, $u_n \leq 0$ et $v_n \leq 0$

ou $u_n = o(v_n)$

Théorème 4 : Comparaison par des grands O /petits o

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

- i) APCR, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$ ii) $u_n = O(v_n)$ iii) $\sum v_n$ CV

Alors : $\sum u_n$ converge.

Exemple 4 : Etudier la nature de $\sum u_n$

a) $u_n = e^{-\sqrt{n}}$

2 Critères de convergence par comparaison

vrai aussi si
APCR, $u_n \leq 0$ et $v_n \leq 0$

ou $u_n = o(v_n)$

Théorème 4 : Comparaison par des grands O /petits o

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

- i) APCR, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$ ii) $u_n = O(v_n)$ iii) $\sum v_n$ CV

Alors : $\sum u_n$ converge.

Exemple 4 : Etudier la nature de $\sum u_n$

a) $u_n = e^{-\sqrt{n}}$

b) $u_n = \frac{\sqrt{n} e^{\cos n} + \sin^2(n)}{n^3 - n}$

2 Critères de convergence par comparaison

vrai aussi si
APCR, $u_n \leq 0$ et $v_n \leq 0$

ou $u_n = o(v_n)$

Théorème 4 : Comparaison par des grands O /petits o

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

- i) APCR, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$ ii) $u_n = O(v_n)$ iii) $\sum v_n$ CV

Alors : $\sum u_n$ converge.

Exemple 4 : Etudier la nature de $\sum u_n$

a) $u_n = e^{-\sqrt{n}}$

b) $u_n = \frac{\sqrt{n} e^{\cos n} + \sin^2(n)}{n^3 - n}$

c) $u_n = \frac{\sqrt{n} e^{\cos n} + \sin^2(n)}{n^{5/2} - n}$

2 Critères de convergence par comparaison

SF 4 : comparaison avec une série de Riemann

Lorsque l'on étudie la nature d'une série $\sum u_n$, si on trouve $\alpha > 1$ tel que :
$$n^\alpha u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Alors

2 Critères de convergence par comparaison

SF 4 : comparaison avec une série de Riemann

Lorsque l'on étudie la nature d'une série $\sum u_n$, si on trouve $\alpha > 1$ tel que : $n^\alpha u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Alors $\sum u_n$ converge.

2 Critères de convergence par comparaison

$$\text{i) } u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad \text{ii) } \forall n \geq 1, \quad \frac{1}{n^\alpha} \geq 0 \quad \text{iii) } \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ CV}$$

SF 4 : comparaison avec une série de Riemann

Lorsque l'on étudie la nature d'une série $\sum u_n$, si on trouve $\alpha > 1$ tel que : $n^\alpha u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Alors $\sum u_n$ converge.

2 Critères de convergence par comparaison

$$\text{i) } u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad \text{ii) } \forall n \geq 1, \quad \frac{1}{n^\alpha} \geq 0 \quad \text{iii) } \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ CV}$$

SF 4 : comparaison avec une série de Riemann

Lorsque l'on étudie la nature d'une série $\sum u_n$, si on trouve $\alpha > 1$ tel que : $n^\alpha u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Alors $\sum u_n$ converge.

Exemple 5 : Etudier la nature de $\sum u_n$:

$$\text{a) } u_n = \frac{\ln n}{n^4}$$

2 Critères de convergence par comparaison

$$\text{i) } u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad \text{ii) } \forall n \geq 1, \quad \frac{1}{n^\alpha} \geq 0 \quad \text{iii) } \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ CV}$$

SF 4 : comparaison avec une série de Riemann

Lorsque l'on étudie la nature d'une série $\sum u_n$, si on trouve $\alpha > 1$ tel que : $n^\alpha u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Alors $\sum u_n$ converge.

Exemple 5 : Etudier la nature de $\sum u_n$:

$$\text{a) } u_n = \frac{\ln n}{n^4} \quad \text{b) } u_n = \frac{\ln n}{n^2}$$

2 Critères de convergence par comparaison

$$\text{i) } u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad \text{ii) } \forall n \geq 1, \quad \frac{1}{n^\alpha} \geq 0 \quad \text{iii) } \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ CV}$$

SF 4 : comparaison avec une série de Riemann

Lorsque l'on étudie la nature d'une série $\sum u_n$, si on trouve $\alpha > 1$ tel que : $n^\alpha u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Alors $\sum u_n$ converge.

Exemple 5 : Etudier la nature de $\sum u_n$:

$$\text{a) } u_n = \frac{\ln n}{n^4} \quad \text{b) } u_n = \frac{\ln n}{n^2} \quad \text{c) } u_n = \frac{\ln n}{n^{3/2}}$$

2 Critères de convergence par comparaison

$$\text{i) } u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad \text{ii) } \forall n \geq 1, \quad \frac{1}{n^\alpha} \geq 0 \quad \text{iii) } \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ CV}$$

SF 4 : comparaison avec une série de Riemann

Lorsque l'on étudie la nature d'une série $\sum u_n$, si on trouve $\alpha > 1$ tel que : $n^\alpha u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Alors $\sum u_n$ converge.

Exemple 5 : Etudier la nature de $\sum u_n$:

$$\text{a) } u_n = \frac{\ln n}{n^4} \quad \text{b) } u_n = \frac{\ln n}{n^2} \quad \text{c) } u_n = \frac{\ln n}{n^{3/2}} \quad \text{d) } u_n = \frac{\ln n}{n^\alpha} \quad (\alpha > 1)$$

III Nature d'une série dans le cas général

I Généralités

II Séries à termes positifs

III Nature d'une série dans le cas général

1 Convergence absolue

Théorème 1

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si $\sum |u_n|$ converge alors :

1 Convergence absolue

Théorème 1

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si $\sum |u_n|$ converge alors : $\sum u_n$ converge.

1 Convergence absolue

On dit que $\sum u_n$ *converge absolument*

Théorème 1

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si $\sum |u_n|$ converge alors : $\sum u_n$ converge.

1 Convergence absolue

On dit que $\sum u_n$ converge absolument

Théorème 1

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si $\sum |u_n|$ converge alors : $\sum u_n$ converge.

Exemple 1 : ⚠ Attention ⚠

Donner un exemple de série convergente mais non absolument convergente.

1 Convergence absolue

On dit que $\sum u_n$ *converge absolument*

Théorème 1

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si $\sum |u_n|$ converge alors : $\sum u_n$ converge.

Exercice 1

Démontrer le théorème.

1 Convergence absolue

On dit que $\sum u_n$ converge absolument

Théorème 1

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si $\sum |u_n|$ converge alors : $\sum u_n$ converge.

Exemple 2

Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^{5/4} + 1}$ converge.

1 Convergence absolue

Théorème 2 : Comparaison par des grands O /petits o

Soient $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

i)

ii)

iii)

Alors :

1 Convergence absolue

Théorème 2 : Comparaison par des grands O /petits o

Soient $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

- i) $APCR$, $v_n \geq 0$ ii) iii)

Alors :

1 Convergence absolue

Théorème 2 : Comparaison par des grands O /petits o

Soient $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

- i) $APCR$, $v_n \geq 0$ ii) $u_n = O(v_n)$ iii)

Alors :

1 Convergence absolue

Théorème 2 : Comparaison par des grands O /petits o

Soient $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

- i) $APCR$, $v_n \geq 0$ ii) $u_n = O(v_n)$ iii)

Alors :

1 Convergence absolue

Théorème 2 : Comparaison par des grands O /petits o

Soient $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

- i) $APCR$, $v_n \geq 0$ ii) $u_n = O(v_n)$ iii) $\sum v_n < \infty$

Alors :

1 Convergence absolue

Théorème 2 : Comparaison par des grands O /petits o

Soient $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

- i) $APCR$, $v_n \geq 0$ ii) $u_n = O(v_n)$ iii) $\sum v_n < \infty$

Alors : $\sum u_n$ converge absolument

1 Convergence absolue

Théorème 2 : Comparaison par des grands O /petits o

Soient $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

- i) $\sum v_n < \infty$, $v_n \geq 0$ ii) $u_n = O(v_n)$ iii) $\sum v_n < \infty$

Alors : $\sum u_n$ converge absolument (donc converge tout court)

1 Convergence absolue

Théorème 2 : Comparaison par des grands O /petits o

Soient $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

- i) $\sum v_n < \infty$, $v_n \geq 0$ ii) $u_n = O(v_n)$ iii) $\sum v_n < \infty$

Alors : $\sum u_n$ converge absolument (donc converge tout court)

1 Convergence absolue

Une seule des deux suites
est positive : v_n

Théorème 2 : Comparaison par des grands O /petits o

Soient $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

- i) APCR, $v_n \geq 0$ ii) $u_n = O(v_n)$ iii) $\sum v_n$ CV

Alors : $\sum u_n$ converge absolument (donc converge tout court)

1 Convergence absolue

Une seule des deux suites
est positive : v_n

« jamais de $(-1)^n$
dans le O »

Théorème 2 : Comparaison par des grands O /petits o

Soient $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

- i) APCR, $v_n \geq 0$ ii) $u_n = O(v_n)$ iii) $\sum v_n$ CV

Alors : $\sum u_n$ converge absolument (donc converge tout court)

1 Convergence absolue

Une seule des deux suites
est positive : v_n

« jamais de $(-1)^n$
dans le O »

Théorème 2 : Comparaison par des grands O /petits o

Soient $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

- i) APCR , $v_n \geq 0$ ii) $u_n = O(v_n)$ iii) $\sum v_n < \infty$

Alors : $\sum u_n$ converge absolument (donc converge tout court)

⚠ Attention ⚠

Le critère d'équivalence n'est plus valable pour les séries à terme général de signe non constant

1 Convergence absolue

Une seule des deux suites
est positive : v_n

« jamais de $(-1)^n$
dans le O »

Théorème 2 : Comparaison par des grands O /petits o

Soient $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

- i) APCR, $v_n \geq 0$ ii) $u_n = O(v_n)$ iii) $\sum v_n$ CV

Alors : $\sum u_n$ converge absolument (donc converge tout court)

Exemple 3 : Ex. 7.2, banque INP

Etudier la nature de :
$$\sum \frac{((-1)^n + i) \sin(\frac{1}{n}) \ln n}{\sqrt{n+3} - 1}$$

Rappel : séries de références

- La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi :

Rappel : séries de références

- La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi : $\alpha > 1$.

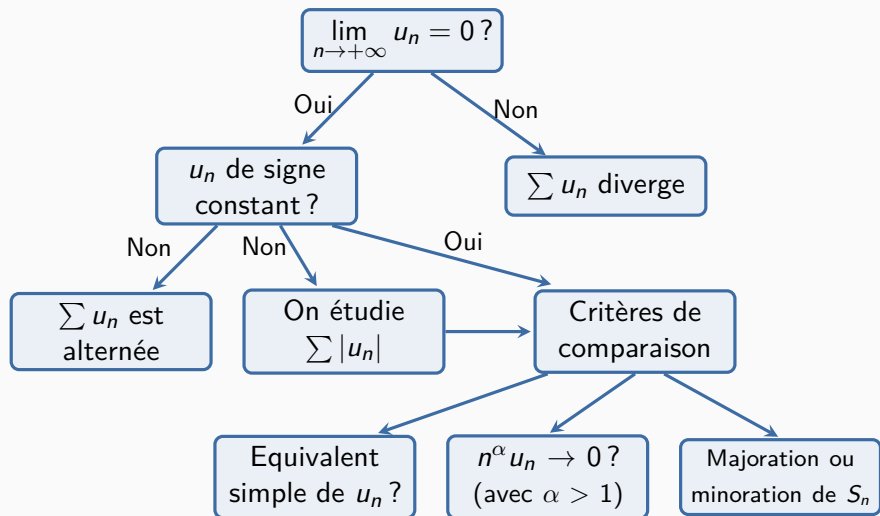
Rappel : séries de références

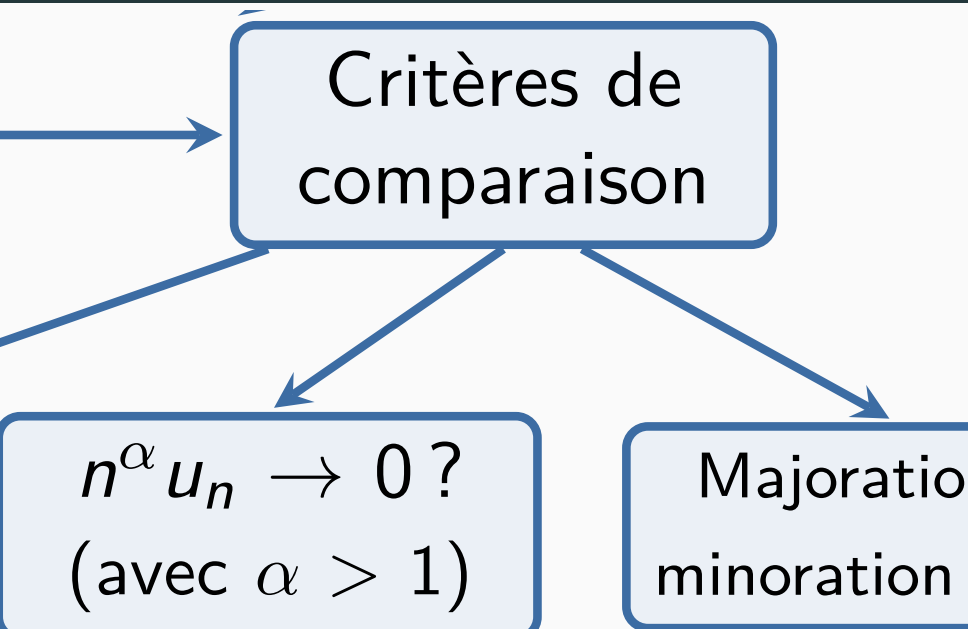
- La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi : $\alpha > 1$.
- La série de Riemann alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge ssi :

Rappel : séries de références

- La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi : $\alpha > 1$.
- La série de Riemann alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge ssi : $\alpha > 0$.

2 Bilan des techniques





2 Bilan des techniques

SF 6 : Utiliser les DL pour étudier la nature de $\sum u_n$

On découpe u_n en morceaux plus simples puis on applique les critères de comparaison à chacun des morceaux

2 Bilan des techniques

SF 6 : Utiliser les DL pour étudier la nature de $\sum u_n$

On découpe u_n en morceaux plus simples puis on applique les critères de comparaison à chacun des morceaux

Exemple 4 : Etudier la convergence absolue puis la convergence de $\sum u_n$

a)
$$u_n = \frac{(-1)^n}{n + \sqrt{n} \cos n}$$

2 Bilan des techniques

SF 6 : Utiliser les DL pour étudier la nature de $\sum u_n$

On découpe u_n en morceaux plus simples puis on applique les critères de comparaison à chacun des morceaux

Exemple 4 : Etudier la convergence absolue puis la convergence de $\sum u_n$

a) $u_n = \frac{(-1)^n}{n + \sqrt{n} \cos n}$

b) $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$

2 Bilan des techniques

SF 6 : Utiliser les DL pour étudier la nature de $\sum u_n$

On découpe u_n en morceaux plus simples puis on applique les critères de comparaison à chacun des morceaux

Exemple 5 : $u_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$

1. Prouver que : $\pi\sqrt{n^2 + n + 1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$
où α est un réel que l'on déterminera.
2. En déduire que $\sum u_n$ est convergente.

2 Bilan des techniques

SF 6 : Utiliser les DL pour étudier la nature de $\sum u_n$

On découpe u_n en morceaux plus simples puis on applique les critères de comparaison à chacun des morceaux

Exemple 6

Soit $\alpha > 1$. Etablir :

$$\text{a) } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^\alpha} = \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right) \zeta(\alpha)$$

$$\text{b) } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha} = \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}\right) \zeta(\alpha)$$

2 Bilan des techniques

SF 6 : Utiliser les DL pour étudier la nature de $\sum u_n$

On découpe u_n en morceaux plus simples puis on applique les critères de comparaison à chacun des morceaux

Exemple 6

Soit $\alpha > 1$. Etablir :

a)
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^\alpha} = \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right) \zeta(\alpha)$$

b)
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha} = \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}\right) \zeta(\alpha)$$

Pour tout $\alpha > 1$:

$$\zeta(\alpha) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} =$$

2 Bilan des techniques

SF 6 : Utiliser les DL pour étudier la nature de $\sum u_n$

On découpe u_n en morceaux plus simples puis on applique les critères de comparaison à chacun des morceaux

Exemple 6

Soit $\alpha > 1$. Etablir :

a)
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^\alpha} = \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right) \zeta(\alpha)$$

b)
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha} = \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}\right) \zeta(\alpha)$$

Pour tout $\alpha > 1$:

$$\zeta(\alpha) \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$$