

■ Objectif :

- Revoir sur un exemple les techniques classiques relatives aux espaces vectoriels (sous-espace vectoriel, base, supplémentaires).

■ L'exercice

1 15 points Soit $n \geq 3$.

On pose $A = (X + 2)^{n-1}$ et on note F l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ divisibles par A i.e. : $F = \{AQ ; Q \in \mathbb{R}_1[X]\}$

1. a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$

b) Déterminer une base de l'espace vectoriel F .

2. a) On pose $\mathcal{B} = (1, X + 2, (X + 2)^2, \dots, (X + 2)^{n-2}, A, XA)$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Calculer les coordonnées de X^n dans la base $\mathcal{B}$.

3. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_n[X]$.