Objectif :

- L'objectif est de s'entraîner au calcul matriciel : produit, puissances, inverse.

Les notations

On rappelle que : $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Résumé de l'épisode précédent

Vous avez montré entre autres que A et T sont liées par la relation : $AP = PT$.

Les calculs

1. 3 points On note $\mathscr{C}(T)$ l'ensemble des matrices qui commutent avec T *i.e.* $\mathscr{C}(T) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid MT = TM\}$. Démontrer que $\mathscr{C}(T)$ est un sous-anneau de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

2. 3 points Montrer que $\mathscr{C}(T) = \left\{\alpha I_3 + \beta T + \gamma T^2 \ ; \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\}$.

3. 3 points En déduire que $\mathscr{C}(A) = \left\{\alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2 \ ; \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\}$