

■ Objectif :

- Calculer inverse et puissances de matrices.

■ Les exercices

1 3 point Les matrices suivantes sont elles inversibles ? Si oui, déterminer leur inverse

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -3 & -1 & 7 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 3 point Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. La matrice suivante est elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha + 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \beta + 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \gamma + 1 \end{pmatrix}$$

3 8 points On pose : $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. Calculer : AP et PT .
2. En utilisant la formule de binôme calculer T^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. A l'aide des questions précédentes calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On présentera le résultat sous la forme : $A^n = 2^n \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}}_B + 3^n \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}}_C + n3^{n-1} \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}}_D$

où B, C, D sont des matrices indépendantes de n à déterminer.