

## ■ Objectif :

- Etudier une famille très classique de polynômes.

## ■ Les polynômes

On définit une suite de polynômes  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $P_0 = 1$ ,  $P_1 = X$  et  $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

## ■ Les règles du jeu

Dans chaque exercice, on peut utiliser les résultats des exercices du niveau « débutant »

## ■ Les exercices

1 6 points – Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que :  $(1 - X^2)P_n'' - XP_n' + n^2P_n = 0$ .

2 10 points – Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

a) Déterminer toutes les racines de  $P_n$  dans  $[-1, 1]$ .

b) En déduire la valeur du produit  $\prod_{k=0}^{2n-1} \cos \frac{(2k+1)\pi}{4n}$ .