

■ Objectif :

- Etudier une famille très classique de polynômes.

■ Les polynômes

On définit une suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

■ Les règles du jeu

Dans chaque exercice, on peut utiliser les résultats des exercices du niveau « débutant »

■ Les exercices

1 6 points – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $(1 - X^2)P_n'' - XP_n' + n^2P_n = 0$.

2 10 points – Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Déterminer toutes les racines de P_n dans $[-1, 1]$.

b) En déduire la valeur du produit $\prod_{k=0}^{2n-1} \cos \frac{(2k+1)\pi}{4n}$.