II Formules de Taylor « globales »

- **Cadre.** • $n \in \mathbb{N}$ • I est un intervalle non vide, non réduit à un point • $a, b \in I$ • $f : I \to \mathbb{K}$ est une fonction

1 Formule de Taylor à reste intégral

Théorème 1 : Formule de Taylor à reste intégral

Si f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I :

Exercice 1 — Démontrer cette formule par récurrence sur n.

- **Rappel.** Lorsque f est $\mathscr{C}^n$, la formule de Taylor-Young s'écrit :

SF 12 : Majorer ou minorer $f(x)$ par des polynômes

On peut appliquer la formule de Taylor à reste intégral à f puis majorer ou minorer le reste intégral en utilisant la croissance de l'intégrale.

Exemple 1 *SF 12* — Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème 2 : Inégalité de Taylor-Lagrange

Si f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I et si M_{n+1} majore $\left|f^{(n+1)}\right|$ sur $[a,b]$ (ou $[b,a]$) :

Exercice 2 — Etablir cette inégalité à l'aide de la formule de Taylor à reste intégral.

En pratique : appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange lorsque f est une fonction explicite

Il est important de comprendre que le majorant M_{n+1} du théorème est à trouver :
- On calcule $f^{(n+1)}$
- On essaie de majorer $\left|f^{(n+1)}(t)\right|$ par une constante lorsque $t \in [a,b]$.

Exemple 2 *SF 11* — **1.** En appliquant l'inégalité ci-dessus à l'exponentielle, montrer que $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e$.

2. En appliquant l'inégalité ci-dessus une fonction f bien choisie, montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^z$.

3 Bilan sur les formules de Taylor

- **Cadre.** Chaque formule estime l'écart : $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ entre f et son polynôme de Taylor

Formules de Taylor

Formule	Taylor-Young	Taylor à reste intégral	Taylor Lagrange
Expression	$R_n(x) \underset{x\to a}{=} o\left((x-a)^n\right)$	$R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$	$\lvert R_n(x)\rvert \leq \frac{\lvert x-a\rvert^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$
Hypothèse	f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I	f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I	f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I
Intérêt	estimation locale	expression exacte sur I tout entier	estimation sur I tout entier
Exemple	$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$	$\forall x \in [0,\pi], \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$	$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \lvert\sin x - x\rvert \leq \frac{x^3}{6}$