Dénombrement

SF 1 — Savoir si on additionne ou si on multiplie les résultats

- On multiplie les résultats si on dénombre par étape successives (« ... puis ... »)
- On ajoute les résultats si on dénombre par disjonction de cas (« ... ou bien ... »)

SF 2 — Dénombrer des tirages successifs avec remise (ordre et répétition)

Pour p tirages dans un ensembles à n éléments : il y a n^p tirages possibles.

SF 3 — Dénombrer des tirages successifs sans remise (ordre, sans répét)

Pour p tirages dans un ensembles à n éléments : il y a $n(n-1)\dots(n-p+1)$ tirages.

SF 4 — Dénombrer des tirages simultanés (pas d'ordre ni de répétition)

Il y a $\binom{n}{p}$ tirages possibles de p éléments choisis parmi n.

SF 5 — Exploiter un recouvrement disjoint

Pour dénombrer un ensemble F de parties E vérifiant une certaine propriété P :

$$F = \{A \in \mathscr{P}(E) \mid A \text{ vérifie } P\}$$

Il est parfois plus simple de dénombrer les éléments de F vérifiant une propriété supplémentaire portant sur le cardinal, typiquement :

$$F_k = \{A \in \mathscr{P}(E) \mid A \text{ vérifie } P \quad \text{et} \quad |A| = k\}$$

La réunion $\quad F = \bigcup_{k=0}^{n} F_k \quad$ étant disjointe on peut écrire $\quad |F| = \sum_{k=0}^{n} |F_k|$

SF 6 — Utiliser les indicatrices pour calculer des cardinaux

On utilise : $\quad |A| = \sum_{x \in A} \mathbb{1}_A(x).$

Probabilités

SF 7 — Calculer $P(A)$ via : $P(A) = \dfrac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card} \Omega} = \dfrac{\text{« nombre de cas favorables »}}{\text{« nombre de cas possibles »}}$

On peut l'utiliser lorsque les résultats de l'expérience sont équiprobables :

- On précise l'univers Ω.
- On précise que P est la probabilité uniforme sur Ω.
- Le calcul des probabilités se ramène alors à des dénombrements.

SF 8 — Calculer la probabilité $P(A_1 \cup \dots \cup A_n)$ d'une réunion

- *Si les A_i sont deux à deux incompatibles* $P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$.
- *Dans les autres cas*
  - Pour deux événements on utilise : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  - On peut aussi se ramener à la probabilité d'une intersection par l'intermédiaire de l'événement contraire $P(\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n}) = P(\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_n})$.

SF 9 — Calculer la probabilité $P(A_1 \cap \dots \cap A_n)$ d'une intersection

- *Si les A_i sont indépendants* $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)\dots P(A_n)$.
- *Sinon utiliser la formule des probabilités composées* si $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$ alors $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)\dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$.

SF 10 — Calculer $P(A)$ avec la formule des probabilités totales

On l'utilise lorsque la réalisation de A dépend de la réalisation d'autres événements qui s'excluent les uns les autres (plusieurs branches conduisent au résultat)

- On donne un nom à ces événements : $A_1, \dots, A_n$.
- On précise qu'il s'agit d'un système complet d'événements.
- On applique la formule des probabilités totales avec ce s.c.e.

SF 11 — Calculer $P(A)$ avec la formule des probabilités composées

On peut l'utiliser lorsque l'expérience consiste en une succession d'étapes

- On identifie des événements élémentaires : un événement A_i pour l'étape i ;
- On écrit A comme une intersection en fonction des A_i.
- On applique la formule des probabilités composées.

SF 12 — Obtenir une relation de récurrence sur une suite (p_n) de probabilités

- On identifie un événement A_n tel qu'à la n-ième étape : $p_n = P(A_n)$.
- On détermine la valeur de $P_{A_n}(A_{n+1})$ et $P_{\overline{A}_n}(A_{n+1})$.
- La formule des probabilités totales avec le s.c.e $(A_n, \overline{A}_n)$ permet d'exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.

SF 13 — Utiliser la formule de Bayes

On l'utilise lorsque l'on cherche à « remonter le temps » :

- La formule permet d'échanger le conditionnement *i.e.* passer de $P_B(A_k)$ à $P_{A_k}(B)$.
- Elle permet donc de calculer la probabilité d'une cause connaissant la probabilité de sa conséquence.