SF 1 — Construire la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$

La matrice se construit colonne par colonne. Pour former la j^e colonne :
- On calcule l'image $f(b_j)$ du j^e vecteur de $\mathscr{B}$ et on décompose $f(b_j)$ dans la base $\mathscr{C}$
- On range les coordonnées de $f(b_j)$ dans $\mathscr{C}$ en colonne.

SF 2 — Calculer $f(x)$ en utilisant la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$

Si x a pour coordonnées X dans $\mathscr{B}$, le produit AX donne les coordonnées de $f(x)$.

SF 3 — Trouver le noyau de f en utilisant la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$

Pour $x \in E$, de coordonnées X dans $\mathscr{B}$: $\quad x \in \mathrm{Ker}\, f \Leftrightarrow AX = 0$.

Après avoir trouvé les X solutions, il faut prendre soin de revenir au vecteur x.

SF 4 — Trouver l'image de f en utilisant la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$

- Les colonnes de A permettent de calculer $f(b_1),\dots,f(b_p)$.
- On utilise $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\big(f(b_1),\dots,f(b_p)\big)$.
- On peut alors « chasser du Vect les CL » (on peut aussi utiliser le théorème du rang pour obtenir la dimension r de l'image et choisir r vecteurs linéairement indépendants parmi $\big(f(b_1),\dots,f(b_p)\big)$).

SF 5 — Calculer la matrice d'une composée

Si f a pour matrice A dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ et g pour matrice B dans $(\mathscr{C},\mathscr{D})$ alors :
- La *composée* $g \circ f$ est représentée par le *produit* BA.
- Dans le cas d'un endomorphisme, f^k est représenté par A^k.

SF 6 — Utiliser le lien entre bijectivité de f et inversibilité de $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$

- Il faut se rappeler que f est bijective ssi A est inversible
- Dans ce ce cas f^{-1} a pour matrice A^{-1} dans les bases $\mathscr{C}$ et $\mathscr{B}$

SF 7 — Trouver une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} f$ ait une forme spéciale

Etant donné $f \in \mathscr{L}(E)$ si on cherche une base $\mathscr{B} = (b_1,\dots,b_n)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} f = B$:
- *Analyse du problème.* Les colonnes de B donnent des conditions sur $f(b_1),\dots,f(b_n)$, qui peuvent permettre de calculer $b_1,\dots,b_n$
- *Synthèse.* On vérifie que :
  - $\mathscr{B} = (b_1,\dots,b_n)$ est une base de E (la liberté suffit)
  - $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} f = B$ (ce qui est en général vrai par construction de $b_1,\dots,b_n$).

SF 8 — Calculer A^n en utilisant la formule du changement de base

Etant donné $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{K}^p$, on suppose avoir trouvé une base $\mathscr{B}'$ telle que $\mathrm{Mat}_{B'} f = D$ où les puissances de D sont simples à calculer (typiquement D est une matrice diagonale)
- On forme la matrice de passage $P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ (elle se construit colonne par colonne en utilisant les vecteurs de $\mathscr{B}'$)
- La formule du changement de base assure que : $\quad A = PDP^{-1}$
- Par récurrence sur n : $\quad A^n = PD^nP^{-1}$.

SF 9 — Calculer le rang de A

- On transforme A en une matrice échelonnée par opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes
- Le rang est alors le nombre de pivots sur la « diagonale »

SF 10 — Montrer que deux matrices A et B sont semblables

On note f l'endomorphisme canoniquement associé à A et on cherche une base $\mathscr{B} = (b_1,\dots,b_n)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} f = B$ (voir le savoir-faire 7).

SF 11 — Montrer que deux matrices A et B sont équivalentes

Il suffit de montrer que $\mathrm{rg} A = \mathrm{rg} B$.

SF 12 — Exploiter l'hypothèse : $\mathrm{rg}(A) = r$ pour une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

- *Option 1 : on se ramène à J_r.*
  Il existe $U \in GL_n(\mathbb{K})$ et $V \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que : $\quad A = UJ_rV$
- *Option 2 : avec les vecteurs colonnes $(C_1,\dots,C_p)$ de A.*
  Le sous-espace $\mathrm{Vect}(C_1,\dots,C_p)$ de $\mathbb{K}^n$ est de dimension r.
- *Option 3 : avec l'application linéaire $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p,\mathbb{K}^n)$ canoniquement associée*
  L'image $\mathrm{Im}\, f$ est un sous-espace de $\mathbb{K}^n$ de dimension r.
- *Option 4 : avec les sous-matrices.*
  A possède une sous-matrice inversible de taille r.

SF 13 — Calculer la trace d'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$

On choisit une base $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ de E, puis on calcule pour chaque e_k la coordonnée de $f(b_k)$ selon b_k et on additionne.

SF 14 — Justifier que H est un hyperplan de E

On définit une forme linéaire φ de E telle que $H = \mathrm{Ker}\,\varphi$. Il suffit pour cela de reformuler la définition de H sous la forme : $\quad H = \Big\{x \in E \;\Big|\; \underbrace{\dots}_{\varphi(x)} = 0\Big\}$