I Sommes de Riemann

1 Définition et convergence des sommes des Riemann

- **Cadre.** f est une fonction continue par morceaux de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$.

Définition 1

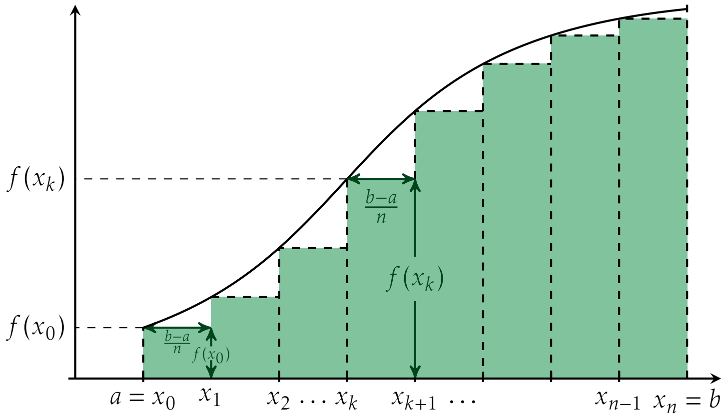
Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle sommes de Riemann de f (à gauche et à droite) les deux sommes :

$R_n(f) =$ et $S_n(f) =$

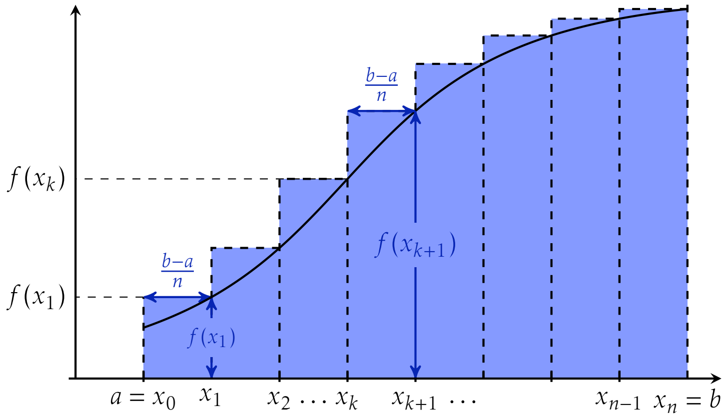
- **Remarques:**

i) Les points $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ forment une subdivision de $[a,b]$ dite régulière car les segments $[x_k, x_{k+1}]$ sont de mêmes longueurs $x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$ (le *pas* de la subdivision)

ii) Les quantités sommées dans $R_n(f)$ et $S_n(f)$ ont des interprétations en termes d'aires sur chaque $[x_k, x_{k+1}]$.
Par exemple, dans $R_n(f)$, chaque terme $\frac{b-a}{n} \times f(x_k)$ est l'aire du rectangle de base $[x_k, x_{k+1}]$ et de hauteur $f(x_k)$.



« $R_n(f) =$ Somme des aires des rectangles verts »



« $S_n(f) =$ Somme des aires des rectangles bleus »

Théorème 1

Les suites $(R_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent et :

Exercice 1 — Démontrer le résultat pour $(R_n(f))$ *dans le cas où f est M-lipschitzienne* pour un certain $M > 0$.

- **Remarque.** Très souvent, on peut choisir $[a,b] = [0,1]$. Dans ce cas le théorème s'écrit :

Cas particulier très important

2 Application à la convergence de certaines suites

Le théorème précédent permet de calculer la limite d'une suite dont le terme général u_n peut être interprété comme une somme de Riemann

Exemple 1 SF 10 — Etudier la limite de la suite de terme général : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

Exemple 2 SF 10 — Trouver un équivalent de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$