I Rôle représentatif des matrices

- **Cadre.** • E est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension p. • F est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n.
  • $\mathscr{B} = (b_1, \dots, b_p)$ est une base de E. • $\mathscr{C} = (c_1, \dots, c_n)$ est une base de F.

- **Rappel.** La donnée de $f \in \mathscr{L}(E, F)$ équivaut à la donnée :

1 Matrice d'une application linéaire

Définition 1

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

- La matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$, est la matrice dont la j-ième colonne est formée des coordonnées de $f(b_j)$ dans la base $\mathscr{C}$.

C'est la matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que :

-

ou encore

-

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,n} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

- **Remarque.** Si $E = F$, *i.e.* si f est un endomorphisme de E, et si $\mathscr{B} = \mathscr{C}$, on note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ au lieu de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)$.

SF 1 : Construire la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$

Exemple 1 — On considère l'application linéaire $f : (x, y, z) \mapsto (2x + z, x - y + z)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.

1. Donner la matrice de f dans les bases $\mathscr{B} = \big((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\big)$ et $\mathscr{C} = \big((1,0), (0,1)\big)$.
2. Donner la matrice de f dans les bases $\mathscr{B} = \big((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\big)$ et $\mathscr{C}' = \big((1,0), (1,1)\big)$.
3. Donner la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}' = \big((1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\big)$ et $\mathscr{C}' = \big((1,0), (1,1)\big)$.

Exemple 2 — On considère l'endomorphisme $f : P \mapsto P(X+1)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.
Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exemple 3 *Ex. 59.1, banque INP* — On considère l'endomorphisme $f : P \mapsto P - P'$ de $\mathbb{K}_n[X]$. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exemple 4 — Si E est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n, quelle est la matrice de Id_E dans une base $\mathscr{B}$ de E ?

Exemple 5 — Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $b_i \in \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{Id}_E)$ pour un certain $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Quelle est la matrice de f dans $\mathscr{B}$?

- **Remarque.** Plus généralement, si $\mathscr{F} = (x_1, \dots, x_p)$ est une famille de p-vecteurs de F, on appelle *matrice de $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{C}$*, notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\mathscr{F}$ la matrice dont la j-ième colonne est formée des coordonnées de x_j dans la base $\mathscr{C}$

Exemple 6 — Dans $\mathbb{R}_3[X]$, on note $\mathscr{B}$ la base canonique, $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3)$.
Donner la matrice dans $\mathscr{B}$ de (P_1, P_2, P_3) où $P_1 = -X^3 + 2X^2 - 3X + 4$, $P_2 = 2X^2 - 3$ et $P_3 = 4X^3 - X$.

2 Correspondance : « application linéaire ↔ matrice »

Théorème 1

Exercice 1 — L'énoncé du théorème contient deux propriétés. Préciser ces deux propriétés.

Exercice 2 — Démontrer que : $\dim \mathscr{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$.

- **Vocabulaire : application linéaire canoniquement associée à une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.**

C'est l'application $f_A \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ de matrice A dans les bases canoniques.

- **Notation : noyau et image d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.**

On note : • $\mathrm{Ker}\, A \subset \mathbb{K}^p$ le noyau de l'application f_A • $\mathrm{Im}\, A \subset \mathbb{K}^n$ l'image de f_A