3 Rang et matrices extraites

Définition 2

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Une matrice extraite de A est une matrice obtenue en supprimant certaines lignes et certaines colonnes de A. Précisément c'est une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a_{i_1,j_1} & \cdots & a_{i_1,j_q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_m,j_1} & \cdots & a_{i_m,j_q} \end{pmatrix}$ pour certains entiers $(m,q) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $\quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n \quad$ et $\quad 1 \leq j_1 < \cdots < j_q \leq p$

Exemple 1 — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 8 & 9 \\ 3 & 1 & 4 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

En « supprimant » la ligne 2 et les colonnes 2 et 5, on forme la matrice extraite $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Théorème 5

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $r \in \mathbb{N}^*$.

- Si $\operatorname{rg} A = r$ alors toute matrice extraite de A est de rang au plus r.
- Il y a équivalence entre :
  i) $\operatorname{rg}(A) \geq r$;
  ii) Il existe une matrice carrée A' extraite de A inversible de taille r.

Démonstration.

- Soit A' une matrice extraite de A. Il s'agit de montrer que $\operatorname{rg}(A') \leq \operatorname{rg}(A)$.
  Notons la matrice A_1 formée des vecteurs colonnes de A qui figurent dans A' (*i.e.* A_1 est la matrice intermédiaire obtenue en supprimant uniquement les colonnes).
  Puisque les rangs de A_1 et de A sont ceux de leurs vecteurs colonnes, on a $\operatorname{rg}(A_1) \leq \operatorname{rg}(A)$ (les vecteurs colonnes de A_1 forment une sous-famille des vecteurs colonnes de A).
  De même, puisque les rangs de A' et de A_1 sont ceux de leurs vecteurs lignes, on a $\operatorname{rg}(A') \leq \operatorname{rg}(A_1)$ (car les vecteurs lignes de A' forment une sous-famille des vecteurs lignes de A_1).
  Ainsi $\operatorname{rg}(A') \leq \operatorname{rg}(A_1) \leq \operatorname{rg}(A)$.
- $ii) \implies i)$: Supposons qu'il existe une matrice carrée A' extraite de A inversible de taille r. Le point qui précède assure que $\operatorname{rg}(A) \geq \operatorname{rg}(A') = r$.
- $i) \implies ii)$: Supposons que $\operatorname{rg}(A) \geq r$. On peut donc extraire une sous famille libre de r vecteurs colonnes de A. Notons $A_1 \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ la matrice extraite de A formée de ces r vecteurs colonnes : cette matrice est donc de rang r.
  Puisque $\operatorname{rg}(A_1)$ est aussi le rang de ses vecteurs lignes, on peut extraire une sous famille libre de r de ces vecteurs.
  La matrice A' ainsi obtenue après ces deux étapes est ainsi une matrice carrée de taille r et de rang r : elle est donc inversible.

$\square$

- **Conséquence.** Le rang de A est la taille maximale des matrices carrées inversibles extraites de A.