I Théorie du rang

1 Image et noyau d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

• **Notation.** Les vecteurs colonnes de A sont les p éléments de $\mathbb{K}^n$: $C_j = (a_{1j}, \dots, a_{nj})$ pour $j \in [\![1,p]\!]$
Les vecteurs lignes de A sont les n éléments de $\mathbb{K}^p$: $L_i = (a_{i1}, \dots, a_{ip})$ pour $i \in [\![1,n]\!]$

Exercice 1 — On pose : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer une base de $\operatorname{Im} A$ et une base de $\operatorname{Ker} A$.

En pratique

• $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_p)$ • $\operatorname{Ker} A$ est l'ensemble des solutions du système : $AX = 0$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{p,1}(K)$

Théorème 1 : Critère $AX = 0$

On suppose que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible ssi :

• **Conséquence.** $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible ssi $(C_1, \dots, C_n)$ est :

Exercice 2 — Démontrer le théorème.

Exercice 3 — On suppose que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$: $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$. Montrer que A est inversible.

2 Rang d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition 1

On appelle *rang de A* le rang dans $\mathbb{K}^n$ de :

• **Remarque.** Autrement dit : $\operatorname{rg}(A) =$

Exercice 4 — Montrer : **a)** $\boxed{\operatorname{rg}(A) \leq \min(n,p)}$ **b)** $\forall B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $\boxed{\operatorname{rg}(AB) \leq \min(\operatorname{rg}(A), \operatorname{rg}(B))}$
c) $\forall P \in GL_n(\mathbb{K})$, $\operatorname{rg}(PA) = \operatorname{rg}(A)$ **d)** $\forall Q \in GL_p(\mathbb{K})$, $\operatorname{rg}(AQ) = \operatorname{rg}(A)$

Théorème 2 : Inversibilité et rang

On suppose que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible ssi :

• **Conséquence.** $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible ssi $(C_1, \dots, C_n)$ est :

Exercice 5 — Démontrer le théorème.

Théorème 3 : Lien avec le rang d'une famille de vecteurs

Soit $(E, \mathscr{B})$ un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie muni d'une base et $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p) \in E^p$: $\operatorname{rg}(\mathscr{F}) =$

Théorème 4 : Lien avec le rang d'une application linéaire

Soit $(E, \mathscr{B})$ et $(F, \mathscr{C})$ deux $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie munis de bases et $f \in \mathscr{L}(E,F)$: $\operatorname{rg}(f) =$

Théorème 5 : Rang de la transposée (Admis provisoirement)

• • Le rang de A est aussi le rang de :

3 Rang et matrices extraites de $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition 2

Une matrice *extraite de A* est une matrice obtenue en supprimant certaines lignes et certaines colonnes de A.

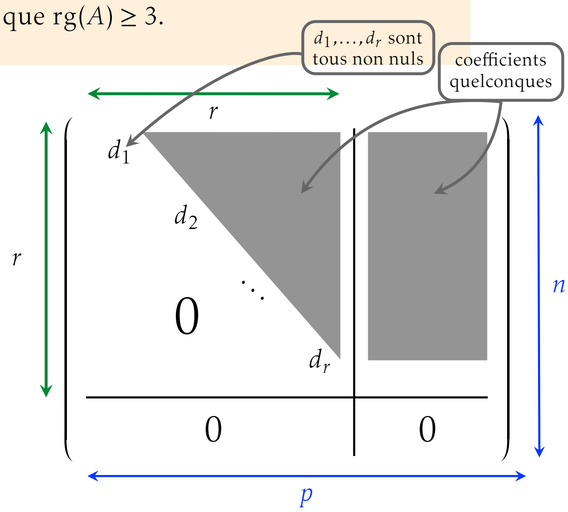
Théorème 6

Le rang de A est la taille maximale des matrices carrées inversibles extraites de A.
Autrement dit, pour tout $r \in \mathbb{N}$: $\operatorname{rg}(A) \geq r$ ssi

Exemple 1 — On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 7 \\ 8 & 0 & 5 & 1 \\ 9 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Montrer sans aucun calcul que $\operatorname{rg}(A) \geq 3$.

4 Méthode de Gauss pour le calcul du rang

• **Remarque.** Les opérations élémentaires conservent le rang.
• **Vocabulaire.** Une matrice est échelonnée si elle a la forme ci-contre :



Exercice 6 — Montrer que cette matrice est de rang r

SF 9 : Calculer le rang par opérations élémentaires

On transforme A en une matrice échelonnée par opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes

Exemple 2 — Rang de : **a)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 7 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 10 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$