III Utiliser un système complet d'événements

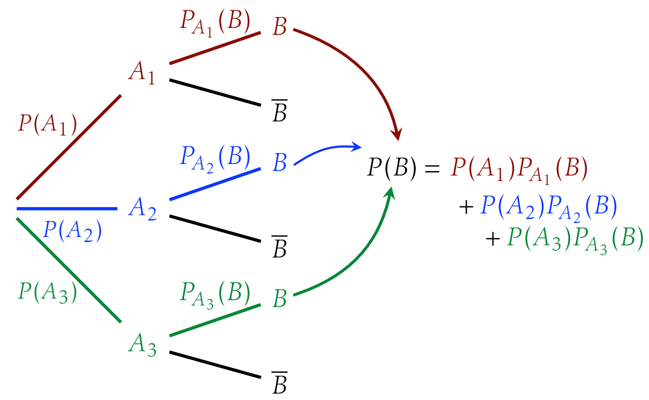
- **Cadre.** (Ω, P) est un espace probabilisé fini.

1 Formule des probabilités totales

Théorème 1

Soit $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet d'événements de Ω.
Pour tout événement $B \in \mathscr{P}(\Omega)$:

Illustration pour $n = 3$:



Exercice 1 *Ex. 105.1, banque INP* — Démontrer la formule.

Attention L'arbre n'a pas à apparaître sur la copie et N'EST PAS CONSIDÉRÉ COMME UNE PREUVE

SF 10 : Calculer $P(A)$ avec la formule des probabilités totales

On l'utilise lorsque la réalisation de A dépend de la réalisation d'autres événements qui s'excluent les uns les autres (plusieurs branches conduisent au résultat)

Exemple 1 — Une urne contient 7 boules jaunes et 3 boules noires. On effectue deux tirages successifs sans remise dans cette urne. Quelle est la probabilité que la deuxième boule tirée soit jaune ?

Exemple 2 *Tirage dans n urnes* — On dispose de n urnes $U_1, U_2, \dots, U_n$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'urne U_k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires. On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?

SF 12 : Obtenir une relation de récurrence sur une suite (p_n) de probabilités

Exemple 3 *cf. Ex. 107, banque INP* — On considère deux urnes : l'urne U_1 contient 3 boules blanches et 1 noire, l'urne U_2 contient 1 boule blanche et 4 noires. On effectue des tirages successifs comme suit : on choisit d'abord une urne au hasard. On tire une boule dans cette urne, on note sa couleur et on la remet dans l'urne. Si la boule tirée est blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1 ; sinon le tirage suivant se fait dans U_2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n la probabilité que le n^e tirage donne une boule blanche. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$

2 Formule de Bayes ou « de probabilités des causes »

Théorème 2

Soit $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ de probabilité non nulle.

1. Pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$:

2. Si $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet d'événements :

Exercice 2 *Ex. 105.1, banque INP* — Démontrer ces deux formules.

SF 13 : Utiliser la formule de Bayes pour « remonter le temps. »

- La formule permet d'échanger le conditionnement : on passe de $P_B(A_k)$ à $P_{A_k}(B)$.
- Elle permet donc de calculer la probabilité d'une cause connaissant la probabilité de sa conséquence.

Exemple 4 — On effectue deux tirages successifs sans remise dans une urne de 7 boules jaunes et 3 boules noires. La deuxième boule tirée est jaune. Quelle est la probabilité que la première boule tirée ait été noire ?

Exemple 5 *Tirage dans n urnes (suite de l'exemple 3)* — On observe que la boule tirée est blanche.
Pour $k \in [\![1, n]\!]$, quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne U_k ?

Exemple 6 *Test d'une maladie rare* — Un laboratoire propose un test de dépistage d'une maladie : lorsque le test est appliqué à une personne malade, il est positif dans 99.8% des cas ; lorsqu'il est appliqué à une personne saine, il est négatif dans 99.6% des cas. D'autre part, on sait qu'une personne sur 100 000 est malade.
Le test est-il fiable ? On répondra en se basant sur la probabilité d'être malade sachant que le test est positif.