- **Cadre.** Ω est un univers fini : $\mathscr{P}(\Omega)$ est l'ensemble de tous les événements liés à l'expérience.

1 Définition d'une probabilité

Définition 1

Une probabilité sur Ω est :

i) *ii)*

- **Vocabulaire.** On dit que (Ω, P) est un espace probabilisé (fini).
- **Remarque.** Pour tout événement A : $0 \leq P(A) \leq 1$.

Théorème 1 : Propriétés des probabilités

Soit P une probabilité sur Ω et soient $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$: •

• • Si $A \subset B$: •

• Si $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{P}(\Omega)$, sont **deux à deux incompatibles** :

- **Remarque.** Avec $A = \Omega$, on a $\overline{A} = \varnothing$ et $P(A) = 1$ donc : $P(\varnothing) = 0$

Exercice 1 — Démonter les formules du théorème

2 Exemples de probabilités

Définition 2

La probabilité *uniforme* sur Ω est l'application $P : A \mapsto \dfrac{\text{Card}A}{\text{Card}\Omega}$ *i.e.* $P(A) =$ _____

- **Conséquence.** Avec cette probabilité, le calcul des probabilités se ramène à des dénombrements.

Exercice 2 SF 7 — On lance 4 fois un dé équilibré. Quelle est la probabilité d'obtenir 4 numéros différents ?

- **Remarque.** La probabilité uniforme n'est pas la seule probabilité que l'on peut définir sur Ω. Le théorème suivant décrit toutes les probabilités $P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ que l'on peut définir sur un univers $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$.

Théorème 2

Soient $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{R}$ tels que : • •

Il existe une unique probabilité P sur Ω telle que :

Cette probabilité est définie pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ par :

- **Vocabulaire.** Une distribution de probabilité sur un ensemble fini E est une famille d'éléments de $[0,1]$ indexée par E et dont la somme est égale à 1.
- **Conséquence.** Pour définir une probabilité P sur Ω il suffit de définir la distribution de probabilité des événements élémentaires $\big(P(\{\omega_1\}), \ldots, P(\{\omega_n\})\big)$

Exercice 3 *Dé truqué* — On lance un dé dont la probabilité d'obtenir la face k est proportionnelle à k. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?

Exercice 4 — Une urne contient des boules numérotées de 1 jusqu'à $2n$ avec : une boule numérotée « 1 », deux boules indiscernables numérotées « 2 », …, $2n$ boules indiscernables numérotées « $2n$ ».

1. Définir un univers Ω et une probabilité sur Ω modélisant le tirage d'une boule dans cette urne.
2. Calculer la probabilité de l'événement A : « On tire une boule de numéro pair ».

3 Probabilité « sachant »

- **Cadre** • P est une probabilité sur Ω

Définition 3

Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ tel que $P(A) > 0$. Pour tout $B \in \mathscr{P}(\Omega)$, la *probabilité de B sachant A* est :

- **Remarque.** L'application P_A est une probabilité sur Ω. Le théorème 1 assure donc que : $P_A(\overline{B}) =$

☢ **Attention** ☢ N'inventez pas de formules qui ne sont pas dans le théorème 1, par ex. : $P_{\overline{A}}(B) \neq$