IV Probabilité d'une intersection

- **Cadre.** (Ω, P) est un espace probabilisé fini.

1 Formule des probabilités composées

En pratique : calculer $P(A \cap B)$

Dans les exercices, en général on *connaît* $P_A(B)$ et on *cherche* $P(A \cap B)$. On utilise : $P(A \cap B) =$

- **Remarque.** Lorsque $P(A) = 0$, on convient que : $P(A)P_A(B) = 0$.

Théorème 1 : Formule des probabilités composées

Pour tous $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{P}(\Omega)$:

Exercice 1 — Démontrer cette formule.

Exercice 2 *SF 11* — On effectue trois tirages successifs et sans remise d'une boule dans une urne contenant 4 boules blanches et 6 boules noires. Calculer la probabilité d'obtenir trois boules blanches.

Exercice 3 ♥ *SF 11* — Un gardien possède n clés pour ouvrir une porte dans le noir : il essaie les clés au hasard une après l'autre et n'utilise jamais deux fois la même clé. Soit $k \in [\![1, n]\!]$.
Avec quelle probabilité ouvre-t-il la porte au k^{e} essai ?

2 Indépendance de deux événements

Définition 1

Deux événements A et B sont dits indépendants si :

- **Remarque.** Si $P(A) \neq 0$, alors A et B sont indépendants ssi :

Théorème 2

Si A et B sont indépendants, alors il en va de même de

Exercice 4 — Montrer que si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont indépendants.

3 Indépendance pour une famille d'événements

Définition 2

On dit que n événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont (mutuellement) indépendants si, pour toute partie I de $[\![1, n]\!]$

Exemple 1 *Indépendance pour trois événements* — Trois événements A, B, C sont indépendants ssi :

-
-
-
-

Attention Mutuellement indépendant $\Longrightarrow$ deux à deux indépendants mais la réciproque est fausse

Situations classiques d'indépendances.

On répète une $\boxed{\text{même}}$ expérience $\boxed{\text{sans}}$ modifier les conditions

- **Généralisation du théorème 2.**. Si $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{P}(\Omega)$ sont indépendants, alors il en va de même des événements $B_1, B_2, \ldots, B_n$ où $B_i \in \left\{A_i, \overline{A_i}\right\}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

Exercice 5 — On reprend la situation de l'exercice 2 mais on effectue cette fois-ci des tirages *avec* remise. Calculer la probabilité d'obtenir trois boules blanches.

Exercice 6 — Soit $n \geq 2$. On lance n fois de suite une même pièce équilibrée.

1. A partir de quelle valeur de n la probabilité que les deux faces de la pièce apparaissent au cours des n lancers est-elle supérieure ou égale à 0,9 ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir au plus un pile au cours des n lancers.