1 Indicatrice d'une partie

- **Cadre.** • E est un ensemble • A et B sont des parties de E.

Définition 1

L'*indicatrice de* A est l'application $\mathbb{1}_A : E \to \{0,1\}$ définie pour tout $x \in E$ par : $\mathbb{1}_A(x) =$

Théorème 1 : Propriétés des indicatrices

1. • *Inclusion :* $A \subset B \iff$ • *Egalité :* $A = B \iff$

2. • *Complémentaire :* $\mathbb{1}_{\overline{A}} =$

 • *Intersection :* $\mathbb{1}_{A\cap B} =$

 • *Réunion :* $\mathbb{1}_{A\cup B} =$

Exercice 1 — Démontrer les propriétés relatives à l'inclusion et à l'intersection.

Exercice 2 — **1.** Montrer que $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{F}\big(E,\{0,1\}\big) \\ A & \longmapsto & \mathbb{1}_A \end{array}$ est bijective.

2. Lorsque E est fini, en déduire une nouvelle preuve de : $|\mathscr{P}(E)| = 2^{|E|}$.

2 Lien avec le cardinal

- **Cadre.** E est un ensemble fini de cardinal n.

Théorème 2 : Lien avec le cardinal

Pour toute partie A de E : $|A| =$

Exercice 3 — Démontrer le théorème.

SF 6 : Utiliser les indicatrices pour calculer des cardinaux

Exercice 4 SF 5 SF 6 — On cherche à calculer : $S = \sum_{A\in\mathscr{P}(E)} |A|$.

1. Calculer S en sommant par paquet selon le recouvrement disjoint $\big(\mathscr{P}_k(E)\big)_{0\leq k\leq n}$ de $\mathscr{P}(E)$.

2. Calculer S en exprimant $|A|$ à l'aide d'indicatrices.

Exercice 5 — Soient $A_1,\dots,A_n$ des parties de E.

1. Vérifier que : $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\big(1-\mathbb{1}_{A_i}\big) = 1 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \mathbb{1}_{A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}}$

2. En déduire : $\displaystyle\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \left|A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right|$

- **Vocabulaire.** Un *recouvrement disjoint* de E est une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de E pour lesquelles :

 • $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i = E$ • Les A_i sont deux à deux disjointes *i.e.* $A_i \cap A_j = \varnothing$ pour tous $i,j\in I$ tels que $i \neq j$.

Si de plus les A_i sont toutes non vides, on dit alors que $(A_i)_{i\in I}$ est une *partition* de E.