- **Cadre.** E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1 Généralités

Rappels sur les formes linéaires

- Une forme linéaire de E est :
- $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ est un espace vectoriel et si E est de dimension finie $\dim\left(\mathscr{L}(E,\mathbb{K})\right) =$
- On appelle hyperplan de E tout :

Exemple 1 SF 14 — Dans chacun des cas suivants, montrer que H est un hyperplan
a) $H = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x+y-z=0\right\}$ **b)** $H = \left\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(2)+2P'(1)=0\right\}$ **c)** $H = \left\{f \in \mathscr{C}^\infty\left(\mathbb{R},\mathbb{R}\right) \mid f(0) = f'(0)\right\}$

Exemple 2 — **1.** Soient $x_0 < \ldots < x_n$. Dans $\mathbb{R}_n[X]$, donner l'expression des formes linéaires coordonnées pour la base $\mathscr{B} = (L_i)_{0\le i\le n}$ des polynômes de Lagrange associés à $x_0,\ldots,x_n$.
2. Trouver une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ dont les formes coordonnées sont les $\varphi_k : P \mapsto \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.

Rappels sur les formes linéaires coordonnées

On suppose E de dimension finie n. Soit $\mathscr{B} = (b_1,\ldots,b_n)$ une base de E

- Pour $j \in [\![1,n]\!]$ la j^e *forme linéaire coordonnée* de E est la forme linéaire :
- La famille $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ est une base de $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$.
- Si H est un hyperplan de E, il existe $a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que :

Exercice 1 — Démontrer les deux derniers points.

Exemple 3 — Dans $\mathbb{R}_3[X]$, trouver une équation de l'hyperplan : $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P'(1) = P(0)\}$.

2 Hyperplans : trois définitions équivalentes

Théorème 1

Soit H un sous-espace vectoriel de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i)

ii)

Si E est de dimension finie n elles sont équivalentes à : *iii)*

- **Remarque.** • En dimension 3 : hyperplan = • En dimension 2 : hyperplan =

Exercice 2 — Démontrer l'équivalence $i) \Leftrightarrow ii)$ en supposant E de dimension quelconque.

Exemple 4 — On pose : $H = \left\{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = 0\right\}$. Déterminer la dimension de H.

Théorème 2 : « Unicité » de l'équation d'un hyperplan

Soit H un hyperplan de E et φ, ψ deux formes linéaires non nulles de E telles que $H = \operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\psi$.

Dans ce cas φ et ψ sont proportionnelles :

Exercice 3 — Démontrer le théorème.

Exemple 5 — Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie supérieure à 2.
Soient H_1 et H_2 deux hyperplans de E distincts. Déterminer la dimension de $H_1 \cap H_2$.

Théorème 3

On suppose E de dimension finie $n \geq 1$. Soit $p \in [\![1,n]\!]$.

1. L'intersection de p hyperplans de E est :
2. Tout sous-espace de dimension $n-p$ est :

- **Interprétation.** Chaque hyperplan fournit une équation, et chaque équation est une contrainte supplémentaire qui enlève potentiellement un degré de liberté.

Exercice 4 — Démontrer les deux points du théorème.