1 Montrer que $\operatorname{Ker} V = \{0\}$.

Considérer $X = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $VX = 0$.

Il s'agit de montrer que $a_0 = \cdots = a_n$.
Pour cela observer que l'égalité $VX = 0$ se traduit par $P(x_1) = \cdots = P(x_n)$ où $P = \sum_{j=0}^{n-1} a_j X^j$.

2 Introduire l'endomorphisme f de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à f.

1. Observer que f est une symétrie.

2. Montrer que la somme $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}) + \operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id})$ est directe (ou utiliser la formule de Grassmann) puis utiliser le théorème du rang.

3 **1.** Découle de la définition du produit matriciel.

2. Pour le sens direct appliquer le critère de **1.** à la matrice A^{-1}.
Pour le sens réciproque commencer par montrer que A est inversible en montrant que $\operatorname{Ker} A = \{0\}$. Pour cela, noter que si $AX = 0$ alors $AX \geq 0$ et $A(-X) \geq 0$.

3. Considérer X tel que $BX \geq 0$ et considérer le plus petit indice $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_i = \min\limits_{j \in [\![1,n]\!]} x_j$.

4 **1.** Echelonner la matrice avec la méthode du pivot.

2. On peut échelonner la matrice avec la méthode du pivot ou trouver directement le rang des colonnes en écrivant $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(C_1, C_2, C_3, C_4)$ puis en « chassant » les combinaisons linéaires jusqu'à obtenir une famille libre.

5 **a)** En échelonnant on peut transformer la matrice en

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1+a \end{pmatrix}$$

Ensuite distinguer deux cas selon la nullité des coefficients sur la diagonale : $a \notin \{0, -1\}$ et $a \in \{0, 1\}$.

b) En échelonnant on peut transformer la matrice en

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & (1-a)(2+a) \end{pmatrix}$$

Ensuite distinguer trois cas selon la nullité des coefficients sur la diagonale : $a \notin \{1, 2\}$, $a = 1$ et $a = -2$.

c) En échelonnant on peut transformer la matrice en

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & 0 & b-a \\ 0 & 0 & d-c & d-c \\ 0 & 0 & 0 & (b-a)(d-c) \end{pmatrix}$$

Ensuite distinguer des cas selon la nullité des coefficients sur la diagonale :

- Premier cas : $b - a \neq 0$ et $d - c \neq 0$.
- Deuxième cas : $b - a = 0$ et $d - c \neq 0$.
- Troisième cas : $b - a \neq 0$ et $d - c = 0$.
- Quatrième cas : $b - a \neq 0$ et $d - c \neq 0$.

6 **a)** Il suffit de trouver rang de

$$A = \begin{array}{c@{}c} \begin{array}{ccccc} (u-v)(1) & (u-v)(X) & (u-v)(X^2) & \dots & (u-v)(X^n) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow 1 \\ \leftarrow X \\ \leftarrow X^2 \\ \leftarrow \vdots \\ \leftarrow X^n \end{array} \end{array}$$

b) On peut utiliser le théorème du rang :

$$\operatorname{rg}(u - v) = n + 1 - \dim \operatorname{Ker}(u - v)$$

Montrer alors que $\operatorname{Ker}(u - v) = \mathbb{R}_0[X]$ (ensemble des polynômes constants) par double inclusion.

7

- Si $M = CL$ avec $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} \ell_1 & \dots & \ell_p \end{pmatrix}$ alors la matrice CL a pour colonnes $(\ell_1 C, \ell_2 C, \dots, \ell_p C)$ (toutes proportionnelles à C).

- Pour la réciproque, si M est de rang 1, montrer que les colonnes $(C_1, \dots, C_p)$ de M sont toutes proportionnelles à une même colonne C en utilisant le fait que $1 = \operatorname{rg}(C_1, \dots, C_p) = \dim \operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_p)$.

8 **1.** Notant E l'élément neutre de G, on peut montrer que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(E)$ pour tout $A \in G$. Pour cela exploiter judicieusement la propriété $\operatorname{rg}(MN) \leq \min(\operatorname{rg} M, \operatorname{rg} N)$ pour montrer successivement que $\operatorname{rg}(A) \leq \operatorname{rg}(E)$ puis que $\operatorname{rg}(E) \leq \operatorname{rg}(A)$.

2. Remarquer que E est la matrice d'un projecteur (calculer E^2) donc E est semblable à la matrice $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ceci permet de se « ramener » au cas où $E = J_r$. Précisément, en fixant $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $J_r = P^{-1} E P$, l'ensemble

$$G' = \left\{ P^{-1} A P \,;\, A \in G \right\}$$

est un groupe pour $\times$ d'élément neutre J_r et $A \mapsto P^{-1} A P$ est un isomorphisme de G sur G'. Montrer alors que les éléments de G' sont de la forme $\begin{pmatrix} \widetilde{A} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $\widetilde{A} \in GL_r(\mathbb{K})$ (exploiter le fait que J_r est l'élément neutre de G') ce qui assure que $\begin{pmatrix} \widetilde{A} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \widetilde{A}$ est un morphisme de groupe injectif de G' dans $GL_r(\mathbb{K})$.

9 **1.** Calculer $(AB)^2$.

2. Vérifier que $\operatorname{rg}(AB) = 2$ (aucun calcul n'est nécessaire en utilisant la question 1). Ensuite exploiter les propriétés sur le rang d'un produit et le fait que $\operatorname{rg}(M) \leq \min(n, p)$ lorsque M est de taille (n, p).

3. Observer que $A(BA - I_2)B = 0$.
Pour montrer que $BA - I_2 = 0$ il s'agit d'assurer que l'on peut « simplifier » par A et B.
Pour cela noter $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ et $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ les applications canoniquement associées à A et B
L'égalité ci-dessus devient $f \circ (g \circ f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) \circ g = 0$.
Pour en déduire que $g \circ f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ il suffit de montrer que :

- g est surjective.
- f est injective

1. Ici on a le choix : on peut aussi partir de f canoniquement associé à N et chercher une base dans laquelle la matrice de f est T. L'idée est de partir de

10 **1.** Utiliser les applications linéaires. Noter f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à T (note [1])
T est semblable à N ssi il existe une base $\mathscr{B}=(b_1,b_2,b_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} f = N$.
Suivre le savoir-faire **SF 7** :

- *Analyse du problème* On cherche une base $\mathscr{B}=(b_1,b_2,b_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que
$$\begin{cases} f(b_1)=0 & \text{i.e. } b_1\in\operatorname{Ker} f\\ f(b_2)=-b_1\\ f(b_3)=-b_2\end{cases}$$

La bonne méthode : commencer par b_3

Le vecteur b_3 doit vérifier :
$$f^3(b_3)=-f^2(b_2)=f(b_1)=0$$
On cherche donc une base (b_1,b_2,b_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que
(1) $b_3\in\operatorname{Ker} f^3$ mais $b_3\notin\operatorname{Ker} f^2$
(2) $b_2=-f(b_3)$.
(3) $b_1=-f(b_2)$ (Par construction : $b_1\in\operatorname{Ker} f$)

- *Synthèse* Trouver $\mathscr{B}=(b_1,b_2,b_3)$ revient à trouver b_3.Concrètement :
  - Calculer T^2 et T^3.
  - Chercher un vecteur dans $\operatorname{Ker} f^3$ mais pas de $\operatorname{Ker} f^2$
  - Calculer $b_2=-f(b_3)$ (utiliser la matrice T)
  - Calculer de même $b_1=-f(b_2)$.

  Ensuite :
  - Justifier que $\mathscr{B}=(b_1,b_2,b_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
  - C'est tout ! Par construction $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} f = N$.

2. a) Avec le pivot on trouve $M^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

b) Ici ne pas utiliser les applications linéaires mais la définition de la similitude des matrices.
Constater que : $M=I_3+T$ et $M^{-1}=I_3+N$.
On sait que T et N sont semblables : on peut donc exprimer T en fonction de N. On peut en déduire M en fonction de M^{-1}.

11 **1.** Utiliser les applications linéaires. Noter f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A et chercher une base $\mathscr{B}=(b_1,b_2,b_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} f = T$ (suivre le savoir-faire **SF 7**).

2. Fixer $N=\begin{pmatrix}a&d&g\\b&e&h\\c&f&i\end{pmatrix}$ et résoudre : $NT=TN$.

3. Montrer que $M\in\mathscr{C}_A$ ssi $P^{-1}MP\in\mathscr{C}_T$ et en déduire que $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_T$ ont la même dimension.

12 Notant f l'endomorphisme canoniquement associé à A. Il s'agit de montrer l'existence d'une base $\mathscr{B}=(b_1,\dots,b_n)$ dans laquelle f a pour matrice $\lambda E_{1,1}$ ou $E_{2,1}$. Distinguer deux cas :

- Le cas où $\operatorname{Im} f\cap\operatorname{Ker} f=\{0\}$. Dans ce cas $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires. Considérer une base $\mathscr{B}$ adaptée à la somme directe et montrer que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} f$ est de la forme $\lambda E_{1,1}$.
- Le cas où $\operatorname{Im} f\cap\operatorname{Ker} f\neq\{0\}$. Montrer dans ce cas que $\operatorname{Im} f\subset\operatorname{Ker} f$ et construire une base $\mathscr{B}=(b_1,\dots,b_n)$ telle que $f(b_1)=b_2$ et $(b_2,\dots,b_n)$ est une base de $\operatorname{Ker} f$.

13 **1.** Il suffit de montrer que A est de rang 3

2. Utiliser les applications linéaires. Noter f l'application canoniquement associée à A et chercher une base $\mathscr{B}'=(b_1,b_2,b_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et une base $\mathscr{C}'=(c_1,c_2,c_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telles que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'} f = J$ *i.e.* telles que $f(b_1)=c_1$, $f(b_2)=c_2$ et $f(b_3)=0$.

3. Calculer la dimension de $\operatorname{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)$ à l'aide de A et en déduire par l'absurde que J ne peut être la matrice de f dans une autre base.

14 Se ramener à J_r :

- Ecrire A sous la forme $A=UJ_rV$
- Ecrire J_r comme une somme de r matrices de rang 1 (prendre des matrices élémentaires)
- En déduire A comme une somme de r matrices de rang 1

15 Se ramener à J_r :

- Ecrire A sous la forme $A=UJ_rV$
- Ecrire J_r comme une somme de 2 matrices inversibles (prendre des matrices diagonales)
- En déduire A comme une somme de 2 matrices inversibles

16 Se ramener à J_r :

- Ecrire A sous la forme $A=UJ_rV$
- Ecrire $J_r=\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sous la forme $J_r=\widetilde{B}\times\widetilde{C}$ où $\widetilde{B}$ est de taille (n,r) et $\widetilde{C}$ est de taille (r,p) (prendre des matrices « de type J_r »)
- En déduire l'écriture attendue pour A

17 Plusieurs possibilités, par exemple :

- *Option 1 : se ramener à J_r*
  - Ecrire A sous la forme $A=UJ_rV$ où $r<n$.
  - Chercher une matrice $\widetilde{B}$ de rang 1 telle que $J_rB=BJ_r=0$ (prendre une matrice diagonale très simple)
  - Prendre alors $B=V^{-1}\widetilde{B}U^{-1}$.
- *Option 2 : utiliser les applications linéaires* En notant f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A, construire un endomorphisme g de rang 1 tel que $\operatorname{Im} g\subset\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f\subset\operatorname{Ker} g$. Procéder par « interpolation linéaire » en définissant g sur une base de $\operatorname{Im} f$ complétée en une base de E.

18 Se ramener à J_r :

- Ecrire A sous la forme $A=UJ_rV$
- Ecrire $J_r=\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sous la forme $J_r=J_r\times\widetilde{M}\times J_r$ où $\widetilde{M}$ est de taille (p,n) (prendre une matrice « de type J_r »)
- En déduire l'écriture attendue pour A

la matrice la plus « compliquée », ici T pour définir l'application et de chercher une base dans laquelle f a la matrice la plus « simple » (celle avec le plus de 0), ici N, ceci parce que c'est la matrice N qui va donner les conditions que doivent satisfaire les vecteurs

19 **1.** Chercher N par bloc sous la forme $N = \begin{pmatrix} N_1 & N_3 \\ N_2 & N_4 \end{pmatrix}$ et effectuer le produit par bloc $J_r N J_r$. On constate que le produit est nul ssi $N_1 = 0$ donc une base de G est la famille des $E_{i,j}$ pour $(i,j) \in [\![r+1\,,p]\!] \times [\![1\,,r]\!] \cup [\![1\,,p]\!] \times [\![r+1\,,n]\!]$

2. • Ecrire A sous la forme $A = UJ_rV$
• Montrer que $M \in F$ ssi $VBU \in G$.
• En déduire un isomorphisme de F sur G.

20 En posant $p = \text{rg}(A)$ et $q = \text{rg}(B)$ constater que :

- A est équivalente à $J_r = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
- B est équivalente à $K_q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
- La matrice $J_r + K_q$ est diagonale et de rang $\min(n, p+q)$.

21 Calculer $\text{tr}(A^\top A)$ en fonction des coefficients $a_{i,j}^2$ de A (et se rappeler qu'une somme de réels positifs n'est nulle que lorsque tous les termes sont nuls).

22 Pour toute $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, l'application $T(A) : M \mapsto \text{tr}(AM)$ est une forme linéaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Il s'agit de montrer qu'il existe une unique $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $T(A) = f$.
Autrement dit il s'agit de montrer que
$$T : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & T(A) \end{array}$$
est bijective.
Montrer que T est un isomorphisme à l'aide du théorème « miracle ».

23 A l'aide de $A = AB - BA$ montrer que $A^p = ABA^{p-1} - BA^p$.
En utilisant les deux propriétés de la trace (linéarité et symétrie), montrer alors que $\text{tr}A^p = 0$.

24 **1. a)** Comparer les cardinaux.

b) Il reste à prouver la stabilité par passage à l'inverse. Pour cela la non injectivité établie à la question **1a)** assure l'existence de deux indices $k < \ell$ tels que $M^k = M^\ell$. Exploiter cette égalité pour écrire M^{-1} comme une puissance de M.

2. a) Il s'agit de prouver que φ est une bijection de $\mathscr{G}$ dans lui-même. Ici on peut par exemple fixer $B \in \mathscr{G}$ et résoudre $\varphi(N) = B$.

b) $A \times A = \sum\limits_{M \in \mathscr{G}} \big(\sum\limits_{N \in \mathscr{G}} M \times N \big)$ et constater que $\sum\limits_{N \in \mathscr{G}} M \times N = A$ (poser $N' = M \times N$ dans la somme intérieure).
Pour la conclusion noter que $B = \dfrac{1}{p} \times A$ est la matrice d'un projecteur et exploiter le lien entre la trace et la rang pour les projecteurs.

25 **1.** Piocher dans la base canonique pour A_1 et A_2 et noter que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ est nilpotente.

2. Montrer que la matrice M de f dans cette base est de la forme : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis calculer M^2.

26 Il existe $A_1, \dots, A_N \in G$ telles que : $\mathscr{M}_n(\mathbb{C}) = \text{Vect}(A_1, \dots, A_N)$. Montrer que l'application
$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ M & \longmapsto & \big(\text{tr}(MA_1), \dots, \text{tr}(MA_N)\big) \end{array}$$
est injective.

27 **1.** Procéder par l'absurde et calculer $\text{tr}(C^{-1}AB - C^{-1}BA)$.

2. Procéder par récurrence sur n.

28 Si $\mathscr{B} = (1, X, \dots, X^n)$ alors $\text{tr} f = \text{tr} A$ où $A = \text{Mat}_{\mathscr{B}} f$.
Or pour tout $k \in [\![1\,,n]\!]$:
$$f(X^k) = \int_X^{X+1} t^k \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_X^{X+1} = \frac{1}{k+1} \Big((X+1)^{k+1} - X^k \Big)$$
Il suffit de trouver la trace de :
$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} f(1) & f(X) & f(X^2) & \dots & f(X^n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^n \end{array} \end{array}$$

Il n'est pas utile de calculer tous les coefficients : seuls les coefficients diagonaux comptent (ce qui signifie qu'il s'agit de savoir ce que vaut le coefficient de X^k lors du calcul de $f(X^k)$).

29 Commencer par écrire la matrice $\text{Mat}_{\mathscr{B}} f$ dans la base canonique $\mathscr{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$.
Il s'agit d'une matrice de taille $(4,4)$.
La première colonne s'obtient par exemple en calculant $f(E_{1,1}) = AE_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ puis en décomposant cette matrice comme combinaison linéaire de $\mathscr{B}$:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \times E_{1,1} + 0 \times E_{1,2} + (-1) \times E_{2,1} + 0 \times E_{2,2}$$
Procéder de même pour les trois autres colonnes.
Réponse à trouver : $\text{tr} f = 4$

30 **1.**

2. Il s'agit de calculer, pour chaque couple $(i,j) \in [\![1\,,n]\!]^2$, la coordonnée de $\varphi(E_{i,j})$ selon $E_{i,j}$, puis de sommer.
Etant donné $i, j \in [\![1\,,n]\!]$, calculer par exemple $\varphi(E_{i,j})$ en décomposant $A = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell} E_{k,\ell}$ puis en utilisant les résultats sur les produits $E_{i,j} \times E_{k,\ell}$ et $E_{k,\ell} \times E_{i,j}$.
Réponse : $\text{tr}\varphi = 2n\,\text{tr}A$.

31 **1.** • *Si* $\text{tr}A = 1$ Montrer que $T(A) = 0$.
• *Si T n'est pas bijectif.* Alors T n'est pas injectif (th miracle). Considérer une matrice $M \neq 0$ telle que $T(M) = 0$. Cela permet d'écrire que deux matrices sont égales : prendre la trace dans cette égalité.

2. • *T est un projecteur.* Montrer que $T \circ T = \text{Id}$.
Fixer $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et montrer que $T\big(T(M)\big) = M$.
• *Calcul de l'image.*
T est un projecteur donc : $M \in \text{Im}\, T \Leftrightarrow T(M) = M$.
On trouve $\text{Im}\, T = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr}M = 0\}$
• *Calcul du noyau.*
$\text{Ker}\, T = \text{Vect}A$ par inclusion-dimension.

32 Montrer que :
$$\text{Ker}\,\varphi = \text{Vect}A \quad \text{et} \quad \text{Im}\,\varphi = \underbrace{\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr}M = 0\}}_{H}$$

Procéder par inclusion-dimension :

- Montrer que $\operatorname{Ker}\varphi \subset \operatorname{Vect} A$ et que $\operatorname{Im}\varphi \subset H$.
- On peut montrer que $\dim(\operatorname{Ker}\varphi) = \dim(\operatorname{Vect} A)$ et $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = \dim H$ sans efforts en combinant judicieusement :
  - Le théorème du rang appliqué à φ
  - Le calcul de $\dim \operatorname{Vect} A$ et $\dim(\operatorname{Im}\varphi)$

33

- *$H = \{P \in \mathbb{K}_n[X] \mid P(\alpha) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{K}_n[X]$.* Ecrire H comme le noyau d'une forme linéaire *i.e.* $H = \operatorname{Ker}\varphi$ où $\varphi : P \mapsto \dots$.
  L'expression de $\varphi(P)$ se lit sur la définition de H (vu que $\operatorname{Ker}\varphi = \{P \mid \varphi(P) = 0\}$).
- *Base de H* Ecrire H comme un Vect. Deux possibilités :
  - *Méthode 1.* Fixer $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}_n[X]$ et procéder par équivalences
    $$P \in H \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k = 0$$
    On peut prendre $a_1, \dots, a_n$ arbitraires et exprimer a_0 puis P en fonction de $a_1, \dots a_n$.
    On arrive à $H = \operatorname{Vect}\left((X^k - \alpha^k)\right)_{1 \le k \le n}$.
    Reste à prouver la liberté de $\left((X^k - \alpha^k)\right)_{1 \le k \le n}$.
  - *Méthode 2.* Fixer $\in \mathbb{K}_n[X]$ et utiliser le lien entre racine et divisibilité :
    $$P \in H \Leftrightarrow (X - \alpha) \mid P$$
    On arrive à $H = \operatorname{Vect}\left((X - \alpha)X^k\right)_{0 \le k \le n-1}$.
    Reste à prouver la liberté de $\left((X - \alpha)X^k\right)_{0 \le k \le n-1}$.

34

1. $\mathcal{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X], \mathbb{R})$ est de même dimension que $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ à savoir n donc la liberté suffit.
   Fixer $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que
   $$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k = 0$$
   Attention, cette égalité est une égalité entre applications définies sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et elle signifie :
   $$\boxed{\forall P \in \mathbb{K}_n[X]}, \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(P) = 0$$
   c'est à dire :
   $$\boxed{\forall P \in \mathbb{K}_n[X]}, \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k P(x_k) = 0$$
   Evaluer en des polynômes P judicieusement choisis de sorte que toutes les $P(x_k)$ soient nulles sauf une seule.
2. Il s'agit de montrer que l'application $\Psi : P \mapsto \int_0^1 P$ est une combinaison linéaire des φ_k.

35 En introduisant une forme linéaire φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par laquelle $H = \operatorname{Ker}\varphi$ il s'agit de construire une matrice inversible M pour laquelle $\varphi(M) = 0$.

- S'il existe $i \neq j$ tels que $\varphi(E_{i,j}) \neq 0$, on peut trouver M sous la forme $I_n + \lambda E_{i,j}$.
- Si $\varphi(E_{i,j}) = 0$ pour tous $i \neq j$ alors il faut procéder différemment pour construire M (mais c'est encore possible)

36

37

1. Etant donné $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, vérifier que $f^*(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda f^*(\varphi) + \mu f^*(\psi)$, c'est vérifier que
   $$(\lambda\varphi + \mu\psi)\big(f(x)\big) = \lambda\varphi\big(f(x)\big) + \mu\psi\big(f(x)\big)$$
   pour tout $x \in E$.
2. En notant $M = (m_{i,j})$ la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(f^*)$, pour tout $j \in [\![1, n]\!] : f^*(\varphi_j) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j}\varphi_i$ donc les coefficients sont donnés par :
   $$m_{i,j} = \big(f^*(\varphi_j)\big)(b_i) = (\varphi_j \circ f)(b_i) = \varphi_j\big(f(b_i)\big)$$
   Il suffit de calculer $f(b_i)$ en fonction des coefficients de la matrice $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f$.
   Réponse : $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(f^*) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f^T$.