Rang, image et noyau

1 Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts.
On définit $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par : $\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad V_{i,j} = x_i^{j-1}$.
Montrer que V est inversible.

2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose dans cette question que $A^2 = I_n$.
Montrer que :
$$\mathrm{rg}(A + I_n) + \mathrm{rg}(A - I_n) = n$$
2. Dans le cas général (*i.e.* sans l'hypothèse que $A^2 = I_n$) montrer que :
$$\mathrm{rg}(A - I_n) + \mathrm{rg}(A + I_n) \geq n$$

3 On dit qu'une matrice à coefficients réels A est positive, et on note $A \geq 0$, lorsque tous ses coefficients sont positifs ou nuls. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *monotone* si elle est inversible et si $A^{-1} \geq 0$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \geq 0$ si et seulement si pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: $\quad X \geq 0 \implies AX \geq 0$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est monotone si et seulement si pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: $\quad AX \geq 0 \implies X \geq 0$.
3. On note B la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ de taille n.
Montrer que B est monotone.

Rang d'une matrice et rang des colonnes

Calcul de rang

4 SF 9 Calculer le rang de :

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 7 \\ 4 & 5 & 0 & 9 \\ 5 & 6 & 0 & 11 \end{pmatrix}$

5 SF 9 Calculer le rang de :

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & a & b \\ c & c & d & d \\ ac & bc & ad & bd \end{pmatrix}$

6 SF 1 SF 9 Soient $u, v : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définies par
$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \qquad u(P) = P(X+1) \qquad \text{et} \qquad v(P) = P(X-1)$$
a) Calculer $\mathrm{rg}(u - v)$ en utilisant sa matrice.
b) Retrouver ce résultat d'une autre manière.

Lien le rang de la famille des colonnes

7 SF 12 Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathrm{rg}(M) = 1$ ssi il existe $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $L \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ non nulles telles que $M = CL$

Rang du produit

8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $G \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $(G, \times)$ est un groupe.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$ pour tous $A, B \in G$.
2. ★★★★ On note r le rang commun des éléments de G. Montrer que G est isomorphe à un sous-groupe de$GL_r(\mathbb{K})$

9 SF 9 Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.
On suppose que : $\quad AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Montrer que AB est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le rang de A et B.
3. Montrer que $BA = I_2$.

Matrices semblables

10 SF 10 On considère les matrices :
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que T est semblable à N.
2. a) Montrer que M est inversible et calculer M^{-1}
b) Déduire de la question 1 que M est semblable à M^{-1}.

11 SF 10 Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, non nulle, telle que $A^2 = 0$.
On considère la matrice T suivante : $\quad T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A est semblable à T.
2. Déterminer une base de $\mathscr{C}_T = \{N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid TN = NT\}$
3. En déduire la dimension de $\mathscr{C}_A = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$

12 SF 10 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{rg}(A) = 1$. Montrer que A est semblable soit à $\lambda E_{1,1}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}^*$, soit à $E_{2,1}$.

Utilisation de la matrice J_r

13 SF 11 SF 9 On pose : $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad$ et $\quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que A est équivalente à J.
2. Déterminer un couple (P, Q) de matrices inversibles telles que $A = QJP^{-1}$.
3. Les matrices A et J sont-elles semblables ? Justifiez.

14 SF 12 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r.
Montrer que A est la somme de r matrices de rang 1.

15 SF 12 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe deux matrices $M_1, M_2 \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que : $\quad A = M_1 + M_2$.

16 SF 12 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K})$ telles que $A = BC$.

17 SF 12 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non inversible. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de rang 1, telle que : $\quad AB = BA = 0$.

18 SF 12 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Montrer qu'il existe $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ telle que $A = AMA$.

19 SF 12 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r. On pose :
$$F = \left\{M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \mid AMA = 0\right\}$$

1. On note J_r la matrice de taille (n, p) suivante : $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Déterminer une base de $G = \left\{N \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \mid J_r N J_r = 0\right\}$.
2. En déduire la dimension de F.

20 SF 12 Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que :

$$\max\{UA+BV\ ;\ U,V\in GL_n(\mathbb{K})\} = \min\big(n, \mathrm{rg}(A)+\mathrm{rg}(B)\big)$$

Trace

Trace d'une matrice

21 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $\mathrm{tr}(A^\top A) = 0$ alors $A = 0$.

22 Soit f une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad f(M) = \mathrm{tr}(AM)$$

23 Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices vérifiant $AB - BA = A$. Calculer $\mathrm{tr}(A^p)$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

24 Soit $\mathscr{G}$ une partie finie et non vide de $GL_n(\mathbb{R})$, stable par multiplication. On pose $p = \mathrm{Card}(\mathscr{G})$.

1. a) Soit $M \in \mathscr{G}$. Pourquoi l'application $k \mapsto M^k$ n'est-elle pas injective sur $\mathbb{N}$?

b) Montrer que $(\mathscr{G}, \times)$ est un groupe.

2. On pose $A = \sum\limits_{N\in\mathscr{G}} N$ et on suppose que $\mathrm{tr}(A) = 0$.
Montrer que $A^2 = pA$ puis en déduire que $A = 0$.

25 SF 1 Soit $f \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$. On suppose que $\mathrm{tr}\big(f(I_2)\big) = 0$ et que $f(N) = 0$ pour toute matrice nilpotente $N \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Trouver trois matrices A_1, A_2 et A_3 nilpotentes telles que $\mathscr{B} = (A_1, A_2, A_3, I_2)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

2. En déduire que $f \circ f = 0$ en considérant $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

26 Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{Vect}\,G = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ on note $S(M)$ sa classe de similitude *i.e.* $S(M) = \big\{P^{-1}MP\ ;\ P \in GL_n(\mathbb{C})\big\}$. On suppose que $\{S(M)\ ;\ M \in G\}$ est fini. Montrer que G est fini.

27 SF 10 Soit $A, B, C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB - BA = C$, $AC = CA$ et $BC = CB$.

1. Montrer que C n'est pas inversible.

2. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que les trois matrices $P^{-1}AP$, $P^{-1}BP$ et $P^{-1}CP$ sont triangulaires.

Trace d'un endomorphisme

28 SF 13 Calculer la trace de l'endomorphisme $f : P \mapsto \displaystyle\int_X^{X+1} P(t)\,\mathrm{d}t$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

29 SF 13 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer la trace de l'endomorphisme $f : M \mapsto AM$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

30 SF 13 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on pose

$$\varphi(M) = AM + MA$$

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

2. Calculer la trace de φ.

Endomorphismes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

31 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On considère l'endomorphisme $T : M \mapsto M - \mathrm{tr}(M)A$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que T n'est pas un automorphisme ssi $\mathrm{tr}(A) = 1$.

2. On suppose que $\mathrm{tr}(A) = 1$. Montrer que T est un projecteur et déterminer $\mathrm{Ker}\,T$ et $\mathrm{Im}\,T$.

3. On fixe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Trouver les matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $M = \mathrm{tr}(M)A + B$.

32 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{tr}A \neq 0$. Déterminer le noyau et l'image de l'endomorphisme $\varphi : M \mapsto \mathrm{tr}(M)A - \mathrm{tr}(A)M$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Formes linéaires et hyperplans

33 Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que $\{P \in \mathbb{K}_n[X] \mid P(\alpha) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{K}_n[X]$ et en déterminer une base.

34 On considère n réels distincts $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.

1. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note φ_k la forme linéaire $P \mapsto P(x_k)$ sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer que $(\varphi_k)_{1\leq k\leq n}$ est une base de $\mathscr{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X], \mathbb{R})$.

2. En déduire qu'il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$: $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^n \lambda_k P(x_k)$.

35 Soit $n \geq 2$ et H un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que H possède une matrice inversible.

36 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ des formes linéaires de E. Montrer que $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est une base de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ si et seulement si $\bigcap\limits_{i=1}^n \mathrm{Ker}\,\varphi_i = \{0_E\}$.

37 SF 1 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. On définit f^* de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ dans lui-même par :

$$\forall \varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K}), \quad f^*(\varphi) = \varphi \circ f$$

1. Montrer que f^* est un endomorphisme de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$.

2. Soit $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de E et $\mathscr{B}' = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ la base de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ des formes coordonnées de E dans $\mathscr{B}$. Exprimer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f^*)$ en fonction de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.