

1 Faire apparaître des sommes de Riemann.

1. On trouve $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt$

Reste ensuite à calculer l'intégrale.

2. $\ln(w_n)$ est une somme de Riemann.

On trouve $\ln w_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \ln(1+t) dt$.

Reste ensuite à calculer l'intégrale, puis à prendre l'exponentielle de la valeur obtenue.

Réponse finale : $w_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{e}$.

3. Faire apparaître une somme de Riemann en posant $k = n + j$. (On peut aussi procéder par comparaison somme-intégrale).

Réponse. $t_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$

2 Réponse $S_n \sim \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}}$.

3 On peut se ramener à une somme de Riemann de la fonction fg en écrivant :

$$g\left(\frac{k+1}{n}\right) = g\left(\frac{k}{n}\right) + \left(g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

On a alors

$$u_n = \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right)}_{v_n} + \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \left(g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right)\right)}_{r_n}$$

• v_n est une somme de Riemann : $v_n \rightarrow \int_0^1 fg$

• Il reste à montrer que r_n tend vers 0.

Avec l'inégalité triangulaire, on peut majorer $|r_n|$ en utilisant une inégalité du type :

$$\left| g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq M \times \frac{1}{n}$$

Pour cela, commencer par appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction g (en justifiant que g' est bornée)

4 Fixer $r \notin \{\pm 1\}$.

$I = \int_0^\pi f(\theta) d\theta$ où la fonction $f : \theta \mapsto \ln(r^2 - 2r \cos \theta + 1)$ est définie sur $[0, \pi]$.

Par le théorème sur les sommes de Riemann $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} S_n$ où

$$S_n = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\pi}{n} \ln \left(\prod_{k=0}^{n-1} \left(r^2 - 2r \cos \frac{k\pi}{n} + 1 \right) \right)$$

Reste à calculer le produit : $\prod_{k=0}^{n-1} \left(r^2 - 2r \cos \frac{k\pi}{n} + 1 \right)$.

Pour cela factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^{2n} - 1$.

On trouve : $\prod_{k=0}^{n-1} \left(r^2 - 2r \cos \frac{k\pi}{n} + 1 \right) = (r^{2n} - 1) \times \frac{r-1}{r+1}$.

Il suffit enfin de calculer la limite de la quantité obtenue lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Distinguer les cas $|r| > 1$ et $|r| < 1$ on trouve :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S_n = \begin{cases} 0 & \text{si } |r| < 1 \\ \pi \ln r^2 & \text{si } |r| > 1 \end{cases}$$

5 1. Fixer $n \geq 1$ et $k \in [0, n]$ et appliquer le théorème de la bi-

jection à $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ pour assurer l'existence d'une unique solution à l'équation $F(x) = \frac{k}{n} I$ avec $I = \int_a^b f$.

2. En remarquant au départ que

$$\mu_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n F^{-1}\left(\frac{k}{n} I\right)$$

on peut faire apparaître une somme de Riemann de F^{-1} et ainsi obtenir

$$\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{I} \int_0^I F^{-1}(y) dy \quad (\text{où } I = \int_a^b f)$$

Le résultat demandé s'obtient en effectuant le changement de variable $y = F(t)$ dans l'intégrale.

6 a) Il s'agit d'une somme de Riemann de la fonction $f : t \mapsto t \ln t$ sur $]0, 1]$, prolongée par continuité en posant $f(0) = 0$. La limite est l'intégrale $\int_0^1 t \ln t dt$.

L'intégrale se calcule par intégration par parties mais la fonction $\ln$ n'est pas $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ (problème en 0).

Pour faire les calculs proprement, calculer $\int_\varepsilon^1 t \ln t dt$ pour $\varepsilon \in]0, 1[$ par IPP puis faire tendre ε vers 0 dans le résultat obtenu.

Réponse : $-\frac{1}{4}$

b) En écrivant $k = \frac{k}{n} \times n$ on fait apparaître la somme de la première question :

$$\sum_{k=1}^n k \ln k = n^2 \times \underbrace{\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \ln \frac{k}{n} \right)}_{= -\frac{1}{4} + o(1)} + \underbrace{\frac{n(n+1)}{2} \ln n}_{= \frac{n^2}{2} \ln n + o(n^2)} = -\frac{n^2}{4} + \frac{n^2 \ln n}{2} + o(n^2)$$

7 Ecrire l'intégrale comme limite d'une somme de Riemann :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \quad \text{où : } S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n} k\right)$$

Par l'inégalité de Jensen : $S_n \geq f\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(a + \frac{b-a}{n} k\right)\right)$

Calculer la somme $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(a + \frac{b-a}{n} k\right)$ puis passer à la limite dans l'inégalité précédente.

8 1. a) En écrivant :

$$n \sum_{j=1}^n u_j v_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i v_j \quad \text{et} \quad \left(\sum_{j=1}^n u_j \right) \left(\sum_{j=1}^n v_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i v_j$$

la différence vaut : $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (u_j - u_i) v_j$

séparer la somme en deux $\sum_{1 \leq i < j \leq n}$ et $\sum_{1 \leq j < i \leq n}$ puis

renommer (i, j) en (j, i) dans la deuxième somme (indices muets) et regrouper de nouveau les deux sommes.

b) Par hypothèse : $(u_j - u_i)(v_j - v_i) \geq 0$ lorsque $i \leq j$.

2. Faire apparaître des somme de Riemann en appliquant le résultat de **1b)** avec $u_k = f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$ et $v_k = g\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$ puis passer à la limite.

9 Fixer $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et appliquer la formule de Taylor à reste intégral à $\sin$ entre 0 et x à l'ordre 3 puis à l'ordre 5.

10 Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à $f : x \mapsto \ln(1+x)$ entre 0 et 1.

Il s'agit de calculer $|f^{(n+1)}|$ puis d'en trouver un majorant M_{n+1} .

On trouve $f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$ donc on peut prendre $M_{n+1} = n!$.

11 a) Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange

b) En écrivant : $\sin \frac{k\pi}{n^2} = \frac{k\pi}{n^2} + \left(\sin \frac{k\pi}{n^2} - \frac{k\pi}{n^2} \right)$ on obtient

$$u_n = \underbrace{\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\pi k}{n} \sin \frac{k\pi}{n} \right)}_{S_n} + \underbrace{\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\pi k}{n} \left(\sin \frac{k\pi}{n^2} - \frac{k\pi}{n^2} \right) \right)}_{R_n}$$

Dès lors :

- On calcule la limite de S_n en utilisant les sommes de Riemann de $x \mapsto x \sin x$ sur $[0, \pi]$.
- On montre que $R_n \rightarrow 0$ en majorant $|R_n|$ avec la question a) qui permet de majorer $\left| \frac{k\pi}{n^2} - \sin \frac{k\pi}{n^2} \right|$

Réponse : $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$

12 a) Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à $\exp$ entre 0 et x à l'ordre $n = 1$.

b) En vue d'appliquer la question a), écrire :

$$e^{\frac{1}{n+k}} = \left(e^{\frac{1}{n+k}} - 1 - \frac{1}{n+k} \right) + \left(1 + \frac{1}{n+k} \right)$$

Ce qui donne :

$$u_n = \underbrace{\sum_{k=1}^n \left(e^{\frac{1}{n+k}} - 1 - \frac{1}{n+k} \right)}_{R_n} + \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}}_{S_n}$$

Ensuite :

- La question a) permet de majorer $|R_n|$ et de montrer que $R_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- On fait apparaître une somme de Riemann pour calculer la limite de S_n .

Réponse : $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln 2$

13 Appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $n-1$ et minorer le reste intégral avec l'hypothèse sur $f^{(n)}$.

14 a) Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à $\sin$ entre 0 et x à l'ordre $n = 2$ pour majorer $|\sin x - x|$ puis substituer x par $\frac{1}{n} \sin t$.

b) En vue d'appliquer la question a), écrire :

$$\sin\left(\frac{1}{n} \sin t\right) = \left(\sin\left(\frac{1}{n} \sin t\right) - \frac{1}{n} \sin t \right) + \left(\frac{1}{n} \sin t \right)$$

Ce qui donne :

$$u_n = n \underbrace{\int_0^\pi \left(\sin\left(\frac{1}{n} \sin t\right) - \frac{1}{n} \sin t \right) dt}_{K_n} + \int_0^\pi \sin t dt$$

La question a) permet de majorer $|K_n|$ et de montrer que $K_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Réponse : $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$

15 a) Fixer $x > 0$ et appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 :

- Entre x et $x+h$ pour majorer : $\underbrace{|f(x+h) - f(x) - hf'(x)|}_{=|A|}$
- Entre x et $x-h$ pour majorer : $\underbrace{|f(x-h) - f(x) + hf'(x)|}_{=|B|}$

Ajouter les deux inégalités obtenues puis utiliser les inégalités triangulaires en commençant par

$$|A| + |B| \geq |B - A|$$

b) Etudier la fonction $\varphi : h \mapsto \frac{M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$.

16 La suite (S_n) est croissante.

En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange entre a et $x \in [0, 1]$, montrer que $M_0 \leq \frac{M_k}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Conclure ensuite en utilisant le fait que $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e$.

17 En posant $\ell_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\ell_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x)$ montrer que :

- $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell_2$ grâce à la formule de Taylor à reste intégral appliquée à f entre x et $x+1$ à l'ordre 2.
- $\ell_2 = 0$ en procédant par l'absurde et en montrant que dans le cas contraire, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \pm\infty$ à l'aide de la formule de Taylor à reste intégral.

18 Relier P_n à la fonction $\sin$: $\sin = P_n + R_n$ et estimer R_n à l'aide des formules de Taylor globales.

19 Ecrire u_n comme l'intégrale d'une somme en utilisant

$$\frac{1}{2k+1} = \int_0^1 t^{2k} dt.$$

La somme qui apparaît se calcule en faisant apparaître une somme géométrique.

$$\text{On obtient : } u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt + (-1)^n \underbrace{\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt}_{K_n}.$$

Il reste :

- A calculer $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$
- A montrer que $K_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ en encadrant l'intérieur.

Réponse : $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4}$

20 1. Ecrire S_n comme l'intégrale d'une somme en utilisant

$$\frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \int_0^x t^{2k} dt.$$

La somme qui apparaît se calcule en faisant apparaître une somme géométrique.

$$2. \text{ On obtient : } S_n = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + (-1)^n \underbrace{\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt}_{K_n}.$$

Il reste :

- A calculer $\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$
- A montrer que $K_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ en encadrant l'intérieur.

Réponse : $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \text{Arctan } x$

21 1. Mettre la somme sous forme intégrale en utilisant

$$\frac{1}{a+kb} = \int_0^1 t^{a-1+kb} dt.$$

La somme qui apparaît se calcule en faisant apparaître une somme géométrique.

On obtient finalement

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{a+kb} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} + (-1)^n \underbrace{\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt}_{K_n}$$

Il reste à montrer que $K_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ en encadrant l'intérieur.

2. La 1. assure que la limite existe et vaut $I = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3} dt$.

On calcule I par une D.E.S :

• D.E.S. $\frac{1}{1+X^3} = \frac{1}{3} \frac{1}{1+X} + \frac{1}{3} \frac{-X+2}{X^2-X+1}$

• On primitive les morceaux, pour le second faire apparaître $\frac{u'}{u}$:

$$\frac{t-2}{t^2-t+1} = \frac{1}{2} \frac{2t-4}{t^2-t+1} = \frac{1}{2} \frac{2t-1}{t^2-t+1} - \frac{3}{2} \frac{1}{t^2-t+1}$$

$\frac{u'}{u}$ forme canonique

22 A l'aide d'une D.E.S.

$$S_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k+1}$$

La somme n'est pas télescopique.

On peut la mettre sous forme intégrale en remplaçant

$$\frac{1}{3k-1} \text{ par } \int_0^1 t^{3k-2} dt \text{ et } \frac{1}{3k+1} \text{ par } \int_0^1 t^{3k} dt.$$

La somme qui apparaît se calcule en faisant apparaître une somme géométrique.

On obtient finalement, après simplifications

$$S_n = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t+t^2}{1+t+t^2} (1-t^{3n}) dt$$

On conclut de façon usuelle en séparant la partie qui dépend de n :

$$S_n = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\int_0^1 \frac{t+t^2}{1+t+t^2} dt}_I - \underbrace{\int_0^1 \frac{t+t^2}{1+t+t^2} \times t^{3n} dt}_{K_n} \right)$$

puis :

• On calcule I à l'aide d'une D.E.S

• On montre que K_n tend vers 0 en encadrant l'intérieur

Réponse : $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$

23 La comparaison somme-intégrale, qui s'appuie sur la décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ pour écrire

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{k^\alpha}$$

permet tous calculs faits de montrer que

$$\frac{(n+1)^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} \leq S_n \leq 1 + \frac{n^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}$$

Réponse : $S_n \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

24 1. On écrit $\ln n! = \sum_{k=1}^n \ln k$ puis on effectue une comparaison

son somme-intégrale en partant de

$$\ln k + 1 \leq \int_k^{k+1} \ln t dt \leq \ln k$$

Tous calculs faits on obtient

$$n \ln n - n + 1 \leq \ln n! \leq (n+1) \ln(n+1) - n$$

Il suffit de montrer que les deux quantités obtenues dans l'encadrement sont équivalentes à $n \ln n$.

2. Traduire l'équivalent : $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$

en : $n! \stackrel{n \rightarrow +\infty}{=} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} (1 + o(1))$ puis passer au logarithme.

25 La comparaison somme-intégrale, qui s'appuie sur la décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t \ln t}$ sur $[2, +\infty[$ pour écrire

$$\frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t \ln t} dt \leq \frac{1}{k \ln k}$$

permet tous calculs faits de montrer que

$$\ln(\ln n + 1) - \ln(\ln 2) \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \leq \ln(\ln n) - \ln(\ln 2) + \frac{1}{2 \ln 2}$$

Il suffit de montrer que les deux quantités obtenues dans l'encadrement sont équivalentes à $\ln(\ln n)$.

26 1. a) Deux possibilités :

- Procéder par intégration par parties en primitivant $t \mapsto 1$ en $t \mapsto t - k + 1$.
- Appliquer la formule de Taylor à reste intégral à l'ordre 1 à une primitive F de f sur $[k, k+1]$.

b) Sommer l'égalité du 1a) pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

2. Appliquer le résultat de 1b) à la fonction $f : t \mapsto \frac{e^{ia \ln t}}{t}$

et calculer les intégrales $\int_1^{n+1} f$ et $\int_1^{n+1} |f'|$

27 1. a) Il n'est pas utile de calculer l'intégrale, la décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $[1, +\infty[$ permet d'écrire

$$\frac{1}{n} \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{n-1}$$

b) Utiliser le théorème de la limite monotone :

- La positivité des a_k donne la croissance de (A_n)
- La majoration de a) permet de majorer A_n .

2. En écrivant $\frac{1}{k} = \int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt - a_k$ pour $k \geq 2$ puis en sommant (et en utilisant Chasles), on obtient

$$H_n = \ln n + 1 - A_n$$

La suite $(1 - A_n)$ est convergente, en notant γ sa limite, on obtient le résultat demandé.

28 1. Suivre la méthode du **SF 14**. Pour $n \geq 2$, considérer

$$A_n = \int_1^n \frac{\ln t}{t} dt - \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} = \sum_{k=2}^n \underbrace{\left(\int_{k-1}^k \frac{\ln t}{t} dt - \frac{\ln k}{k} \right)}_{a_k}$$

- La décroissance de $t \mapsto \frac{\ln t}{t}$ sur $[e, +\infty[$ permet d'écrire, pour tout $k \geq 4$: $0 \leq a_k \leq \frac{\ln(k-1)}{k-1} - \frac{\ln k}{k}$
- L'encadrement précédent permet de montrer que (A_n) est croissante (à partir du rang 3) et majorée, donc convergente.

Sachant que : $\sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} = \frac{(\ln n)^2}{2} - A_n$

le résultat demandé s'obtient en posant $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-A_n)$.

2. Séparer les termes d'indices pairs $k = 2p$ et impairs $k = 2p + 1$:

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = \sum_{p=1}^n \frac{\ln(2p)}{2p} - \sum_{p=0}^{n-1} \frac{\ln(2p+1)}{2p+1}$$

De même

$$\sum_{p=0}^{n-1} \frac{\ln(2p+1)}{2p+1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln k}{k} - \sum_{p=1}^n \frac{\ln(2p)}{2p}$$

Ce qui donne

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = 2 \sum_{p=1}^n \frac{\ln(2p)}{2p} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln k}{k}$$

Dans le premier terme du membre de droite, écrire ensuite $\ln(2p) = \ln 2 + \ln p$ puis séparer la somme et simplifier les termes en commun avec le dernier terme.

3. Avec la question 2. :

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = \ln 2 \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}_{H_n} - \underbrace{\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln k}{k}}_{S_{2n}-S_n}$$

Il suffit d'utiliser :

- le fait que $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$
- le résultat $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(\ln n)^2}{2} + \ell + o(1)$ (avec n et $2n$).

Ce qui précède assure la convergence de la sous-suite

$\left(\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} \right)$ des termes d'indice pairs vers la limite voulue. Reste ensuite à montrer que la sous-suite des termes d'indices impairs converge vers cette même limite.

- 29** 1. Utiliser $H_{4n+4} = \sum_{k=1}^{4n+4} \frac{1}{k}$ pour réexprimer

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k+1} - \frac{3}{4k+2} + \frac{1}{4k+3} + \frac{1}{4k+4}$$

Pour cela, séparer H_{4n+4} en quatre paquets selon que les indices soient de la forme $4k+1$, $4k+2$, $4k+3$ ou $4k+4$:

$$H_{4n+4} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{4k+1} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{4k+2} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{4k+3} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{4k+4}$$

La somme de l'énoncé s'écrit alors :

$$S_n = H_{4n+4} - 4 \sum_{k=0}^n \frac{1}{4k+2} = H_{4n+4} - 2 \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1}$$

En séparant de même les termes d'indices pairs et impairs dans H_{2n+1} on obtient finalement :

$$S_n = H_{4n+4} - 2H_{2n+1} + H_n$$

Conclure en utilisant $H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$

2. Mettre S_n sous forme intégrale en remplaçant les quatre

fractions par des intégrales via $\frac{1}{\alpha+1} = \int_0^1 t^\alpha dt$.

La somme qui apparaît se calcule en faisant apparaître une somme géométrique.

On obtient finalement, après factorisation et simplification du facteur commun $(1-t)$:

$$S_n = \int_0^1 \frac{t^2 + 2t - 1}{(1+t)(1+t^2)} (t^{4n+4} - 1) dt$$

On conclut de façon usuelle en séparant la partie qui dépend de n :

$$S_n = - \underbrace{\int_0^1 \frac{t^2 + 2t - 1}{(1+t)(1+t^2)} dt}_I + \underbrace{\int_0^1 \frac{t^2 + 2t - 1}{(1+t)(1+t^2)} \times t^{4n+4} dt}_{K_n}$$

puis :

- On calcule I à l'aide d'une D.E.S : on trouve $I = 0$
- On montre que K_n tend vers 0 en encadrant l'intérieur