

Sommes de Riemann

1 **SF 10** Etudier les limites des suites de termes généraux :

a) $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2}$ **b)** $w_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{1/n}$ **c)** $t_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{k^2}$

2 **SF 10** **SF 14** Trouver un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$:

- a)** En utilisant une somme de Riemann
b) Par comparaison somme-intégrale

3 **SF 10** Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$.

Montrer : $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f g$

4 Soit $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Calculer : $I = \int_0^\pi \ln(r^2 - 2r \cos \theta + 1) d\theta$
à l'aide de sommes de Riemann

Indication : Utiliser la factorisation de $X^{2n} - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

5 **SF 10** Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement positive.

1. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, il existe un unique $x_{n,k} \in [a, b]$ tel que : $\int_a^{x_{n,k}} f(t) dt = \frac{k}{n} \int_a^b f(t) dt$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mu_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x_{n,k}$.

Montrer que : $\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_a^b t f(t) dt}{\int_a^b f(t) dt}$.

6 **SF 10** **a)** Etudier la limite de $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \ln \frac{k}{n}$

b) En déduire : $\sum_{k=1}^n k \ln k = \frac{n^2 \ln n}{2} - \frac{n^2}{4} + o(n^2)$.

7 **SF 10** Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et convexe sur $[a, b]$ ($a < b$).
En utilisant l'inégalité de Jensen, démontrer que :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

8 **SF 10**

1. a) Soient $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}$. Etablir :

$$n \sum_{j=1}^n u_j v_j - \left(\sum_{j=1}^n u_j \right) \left(\sum_{j=1}^n v_j \right) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (u_j - u_i)(v_j - v_i)$$

b) En déduire que si $u_1 \leq \dots \leq u_n$ et $v_1 \leq \dots \leq v_n$:

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k \right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k v_k$$

2. Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continues par morceaux et croissantes. Montrer que :

$$\int_a^b f(t) dt \int_a^b g(t) dt \leq (b-a) \int_a^b f(t) g(t) dt$$

Formules de Taylor globales

9 **SF 12** Montrer : $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$

10 En appliquant une formule de Taylor à $f : x \mapsto \ln(1+x)$,
montrer que : $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln 2$.

11 **SF 11** **a)** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $|\sin x - x| \leq \frac{x^3}{6}$

b) Etudier la limite de : $u_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{n^2}\right)$

12 **SF 11** **a)** Montrer : $\forall x \in [0, 1], \quad |e^x - 1 - x| \leq \frac{x^2 e}{2}$

b) Etudier la limite de : $u_n = \left(\sum_{k=1}^n e^{\frac{1}{n+k}} \right) - n$

13 **SF 12** Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f^{(n)}(x) \geq \alpha$.

Montrer : $\frac{f(x)}{x^{n-1}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$

14 **SF 11** **a)** Etablir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \left| \sin\left(\frac{1}{n} \sin t\right) - \frac{1}{n} \sin t \right| \leq \frac{1}{6n^3}$$

b) Etudier la limite de $u_n = n \int_0^\pi \sin\left(\frac{1}{n} \sin t\right) dt$

15 **SF 11** Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que pour certains $M_0, M_2 \in \mathbb{R}_+$
 $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq M_0 \quad \text{et} \quad |f''(x)| \leq M_2$

a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer : $\forall h > 0, \quad |f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{h M_2}{2}$.

b) En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f'(x)| \leq \sqrt{2M_0 M_2}$.

16 **SF 11** Soit $f \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R})$, non nulle. On suppose qu'il existe $a \in [0, 1]$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f^{(n)}(a) = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $M_n = \sup_{t \in [0, 1]} |f^{(n)}(t)|$ et $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{M_k}$.
Montrer que (S_n) converge et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \leq \frac{e}{M_0}$.

17 **SF 11** Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que f et f'' possèdent des limites limites en $+\infty$. Montrer que $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

18 **SF 12** **SF 11** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note c_n le nombre de racines strictement positives du polynôme $P_n = \sum_{k=0}^n \frac{-(1)^k}{(2k+1)!} X^{2k+1}$.

Montrer que : $c_n \sim \frac{2n}{e\pi}$.

La ruse de l'intégrale de t^k

19 **SF 13** Etudier la limite de : $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$

20 **SF 13** Soit $x \in [0, 1]$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$.
Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \int_0^x \frac{1 - (-t^2)^{n+1}}{1 + t^2} dt$.

2. En déduire la limite quand n tend vers $+\infty$ de S_n .

21 **SF 13**

a) Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{a+kb} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt$

b) En déduire : $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{1+3k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

22 **SF 13** Etudier la limite de : $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{9k^2 - 1}$.

Comparaisons somme-intégrale

23 **SF 14** Soit $\alpha \in]0, 1[$. A l'aide d'une comparaison somme-intégrale, déterminer un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$.

24 **SF 14**

1. Par comparaison somme-intégrale, établir : $\ln(n!) \sim n \ln n$
2. A partir de la formule de Stirling, montrer qu'en fait :
 $\ln(n!) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n \ln n - n + \frac{\ln n}{2} + \frac{\ln(2\pi)}{2} + o(1)$.

25 **SF 14** En effectuant une comparaison somme-intégrale montrer : $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \sim \ln(\ln n)$.

26 1. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_k^{k+1} f(t) dt = f(k) + \int_k^{k+1} (k+1-t)f'(t) dt$$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \sum_{k=1}^n f(k) \right| \leq \left| \int_1^{n+1} f(t) dt \right| + \int_1^{n+1} |f'(t)| dt$$

2. Soit $\alpha > 0$. Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{e^{i\alpha \ln k}}{k} \right)_{n \geq 1}$ est bornée

Somme harmonique et constante d'Euler

27 **SF 15** La constante d'Euler

1. Pour $n \geq 2$, on pose : $a_n = \int_{n-1}^n \frac{dt}{t} - \frac{1}{n}$ et $A_n = \sum_{k=2}^n a_k$

a) En encadrant l'intégrale, montrer :

$$\forall k \geq 2, 0 \leq a_k \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

b) Montrer que (A_n) est convergente.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Etablir l'existence d'un réel γ tel que :

$$H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$$

28 **SF 15** 1. Montrer qu'il existe un réel ℓ tel que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(\ln n)^2}{2} + \ell + o(1)$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = \ln 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln k}{k}$$

3. En déduire : $\sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{\ln k}{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \gamma \ln 2 - \frac{(\ln 2)^2}{2}$
(où γ désigne la constante d'Euler).

29 **SF 15** **SF 13** Démontrer que

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{4k+1} - \frac{3}{4k+2} + \frac{1}{4k+3} + \frac{1}{4k+4} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

1. En utilisant le développement $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$.

2. En faisant apparaître une intégrale.