Matrice d'une application linéaire

1 SF 1 Dans chacun des cas suivants, écrire la matrice de l'application linéaire f dans les bases canoniques.

a) $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-y, x+2y, 3x-4y) \end{array}$

b) $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y+2z, x-3y+z) \end{array}$

c) $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ P & \longmapsto & \left(P'(1), \int_0^1 P\right) \end{array}$

d) $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & XP + P' + P(1) \end{array}$

2 SF 1 Soit $n \in \mathbb{N}$. Ecrire la matrice de l'application linéaire f dans les bases canoniques.

1. $f : P \mapsto nXP - X^2P'$ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.
2. $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_1[X]$ qui à chaque $P \in \mathbb{R}_n[X]$ associe le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - 3X + 2$.

3 SF 1 Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Expliciter $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$ dans les deux cas suivants :

a) $\mathscr{B} = \left(1, (X+a), (X+a)^2, \dots, (X+a)^n\right)$ et $\mathscr{C} = (1, X, \dots, X^n)$.

b) $\mathscr{B} = (1, X, \dots, X^n)$ et $\mathscr{C} = \left(1, (X-a), (X-a)^2, \dots, (X-a)^n\right)$.

4 SF 1 Soient $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ et $\Phi : P \mapsto \left(P(x_1), \dots, P(x_n)\right)$ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$. On note $L_1, \dots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés à $x_1, \dots, x_n$.

1. Ecrire la matrice de Φ dans les bases canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}^n$.
2. Ecrire la matrice de Φ dans les bases $\mathscr{B}' = (L_1, \dots, L_n)$ et $\mathscr{C}$ (où $\mathscr{C}$ désigne encore la base canonique de $\mathbb{R}^n$).

Matrice, noyau et image

5 SF 3 SF 4 Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^2)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ dans les bases canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^2$.
Déterminer le noyau et de l'image de f.

6 SF 3 SF 4 Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X])$ de matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
Déterminer une base du noyau et de l'image de f.

7 SF 1 SF 3 SF 4 On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

1. Montrer que $\varphi : P \mapsto (3X+1)P + (1-X^2)P'$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Donner la matrice M de φ dans $\mathscr{B}$.
3. En utilisant M, Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\,\varphi$ et de $\mathrm{Im}\,\varphi$.

8 SF 5 On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathscr{S} = \left\{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid M^2 = A\right\}$.

1. Soit $M \in \mathscr{S}$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M.
Montrer que : $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2$ et $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^2$.
2. En déduire que toute matrice $M \in \mathscr{S}$ est de la forme $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & b & d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour certains $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
3. En déduire que $\mathscr{S}$ est vide.

9 SF 1 SF 3 SF 4 Soit $n \geq 3$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.
On suppose que $a_1^2 + \cdots + a_{n-1}^2 > 0$.
On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$

1. Déterminer le rang de f.
2. Trouver tous les $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels $f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ n'est pas injectif.
3. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Matrice, composition et bijectivité

10 SF 5 Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$ qui a pour matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

1. Soit $P \in \mathbb{R}_4[X]$. Donner une expression simple de $\varphi(P)$.
2. En déduire, sans calcul matriciel, l'inverse et les puissances de A.

11 SF 1 SF 3 On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$

$$\varphi : P \mapsto (X^2+2)P'' + (X+1)P' + P$$

1. Ecrire la matrice A de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. En utilisant A, déterminer une base de $\mathrm{Ker}\left(\varphi - \lambda \mathrm{Id}\right)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une base de $\mathbb{R}_2[X]$ dans laquelle la matrice de φ est diagonale.

12 SF 1 SF 2 On note E l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^x$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et trouver une base $\mathscr{B}$ de E.
2. Justifier que $\varphi : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de E.
3. Déterminer la matrice A de φ dans $\mathscr{B}$ et calculer A^{-1}.
4. Déduire de la question précédente une primitive de la fonction $x \mapsto (x^2 + x + 1)e^x$.

13 SF 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et :

$$\forall P \in \mathbb{C}_{n-1}[X], \quad \varphi(P) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} P(\omega^k) X^k$$

Montrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et déterminer φ^{-1}.

14 SF 1 SF 5 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et $f \in \mathscr{L}(E)$.
On note A_f l'endomorphisme $g \mapsto f \circ g - g \circ f$ de $\mathscr{L}(E)$.
On suppose qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale. Montrer qu'il existe une base de $\mathscr{L}(E)$ dans laquelle la matrice de A_f est diagonale.

Matrice d'un endomorphisme dans une base bien choisie

15 SF 1 *Ex. 71, banque INP* Dans $\mathbb{R}^3$, on pose

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\} \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}\big((1,2,3)\big)$$

1. Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.
2. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G et soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Calculer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

16 SF 7 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^n = 0$ mais $f^{n-1} \neq 0$.
Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle f a pour matrice par blocs : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$.

17 SF 1 SF 3 On note s l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice : $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que s est une symétrie et trouver une base des sous-espaces $F = \mathrm{Inv}\, s$ et $G = \mathrm{AntiInv}\, s$
2. Trouver une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de s est diagonale.

18 SF 3 SF 7 On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on note f l'endomorphisme canoniquement associé à A

1. Déterminer f^2.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}\, f$ est un plan vectoriel dont on déterminera une équation.
3. Démontrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est B, et déterminer une telle base.

19 SF 3 SF 5 SF 7 On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et on note f l'endomorphisme canoniquement associé à A

1. Déterminer $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et $\mathrm{Ker}\big((f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^2\big)$.
2. Démontrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est B, et déterminer une telle base.

20 SF 7 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$ de rang r tel que $f \circ f = 0$.
Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle l'endomorphisme f a pour matrice par blocs : $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

21 SF 7 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $f, g \in \mathscr{L}(E)$ telles que : $f^2 = g^2 = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g + g \circ f = 0$.

1. On pose $F = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$.
   Montrer que : $g(F) = G$ et $g(G) = F$.
2. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que
   $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} f = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_m \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} g = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}$$
   pour un certain $m \in \mathbb{N}^*$.

22 SF 7 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2) = r$.
Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est, par blocs, $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, où $B \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{K})$.

Changements de base

23 SF 1 SF 2 SF 3 SF 8 On pose : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A

1. On pose $u_1 = (-1,1,0)$ et $u_2 = (1,0,1)$. Déterminer $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ puis vérifier que (u_1, u_2) en est une base.
2. On pose $u_3 = (1,1,1)$. Calculer $f(u_3) - u_3$ puis montrer que $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer sans effectuer de produit matriciel la matrice T de f dans $\mathscr{B}'$.
4. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

24 SF 1 SF 3 SF 8 On pose : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A

1. On pose : $F = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et $G = \mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id})$.
   Déterminer une base de F et G.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
3. Ecrire la matrice D de f dans une base adaptée à cette décomposition.
4. Donner une relation entre A et D. En déduire une méthode de calcul de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

25 SF 1 SF 3 SF 4 On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

1. Déterminer une base de $\mathrm{Im}\, f$ et de $\mathrm{Ker}\, f$.
2. Montrer que : $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f$.
3. Déterminer sans calcul la matrice D de f dans une base adaptée à la somme directe : $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f$.
   Quelle relation matricielle relie J et D ?

26 SF 3 SF 5 SF 8 On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On note f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Trouver (en s'aidant des résultats donnés)
   a) Une base de $\mathrm{Ker}\, f^2$.
   b) Un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}\big((f - \mathrm{Id})^2\big)$.
   On pourra utiliser les résultats suivants :
   $$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (A - I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
2. Trouver une base $\mathscr{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle f a pour matrice T.
3. Calculer T^n et en déduire une méthode de calcul de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.