1

Commentaire

Suivre la stratégie du savoir faire SF 1 :

- Commencer par déterminer la taille de la matrice :
  - nombre de colonnes = dimension de l'espace de départ
  - nombre de lignes = dimension de l'espace d'arrivée
- On calcule $f(b_1)$ et on met ses coordonnées dans la première colonne
- On calcule $f(b_2)$ et on met ses coordonnées dans la deuxième colonne
- ...
- On calcule $f(b_n)$ et on met ses coordonnées dans la dernière colonne

2

1. Ici $\mathscr{B} = \mathscr{C} = (1, X, \dots X^n)$ donc la matrice est de taille $(n+1)\times(n+1)$ et pour calculer les coefficients sur la k^{e} colonne, il suffit de calculer $f(X^k)$.
2. Ici $\mathscr{B} = (1, X, \dots X^n)$ et $\mathscr{C} = (1, X)$ donc la matrice possède 2 lignes et $n+1$ colonnes.
   Pour calculer les coefficients de la k^{e} colonne il suffit de calculer $f(X^k)$ *i.e.* de calculer le reste de la division euclidienne de X^k par X^2-3X+2 : si le reste est a_kX+b_k alors la k^{e} colonne sera $\begin{pmatrix} b_k \\ a_k \end{pmatrix}$.

3

1. La matrice est de taille $(n+1)\times(n+1)$ et

$$\begin{array}{cccccccc}
 & 1 & X+a & (X+a)^2 & (X+a)^3 & \dots & (X+a)^n & \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
A = & \left(\begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}\right. & \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} & \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} & \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} & \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} & \left.\begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}\right) & \begin{matrix} \leftarrow 1 \\ \leftarrow X \\ \leftarrow X^2 \\ \leftarrow X^3 \\ \vdots \\ \leftarrow \\ \leftarrow X^n \end{matrix}
\end{array}$$

   Pour calculer les coefficients sur la j^{e} colonne, il suffit de développer $(X+a)^j$.
2. La matrice est de taille $(n+1)\times(n+1)$ et

$$\begin{array}{cccccccc}
 & 1 & X & X^2 & X^3 & \dots & X^n & \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
A = & \left(\begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}\right. & \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} & \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} & \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} & \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} & \left.\begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}\right) & \begin{matrix} \leftarrow 1 \\ \leftarrow X-a \\ \leftarrow (X-a)^2 \\ \leftarrow (X-a)^3 \\ \vdots \\ \leftarrow \\ \leftarrow (X-a)^n \end{matrix}
\end{array}$$

   La j^{e} colonne est formée des coordonnées de $P_j = X^j$ dans la base $(1, (X-a), \dots, (X-a)^n)$.
   Il s'agit donc d'exprimer $P_j = X^j$ comme une combinaison linéaire de $(1, (X-a), \dots, (X-a)^n)$

4

1. Ici $\mathscr{B} = (1, X, \dots, X^{n-1})$ et
   $\mathscr{C} = \big((1,0,\dots,0), (0,1,0,\dots,0), \dots, (0,\dots,0,1)\big)$ donc la matrice est de taille $n\times n$ et pour calculer les coefficients sur la j^{e} colonne, il suffit de calculer $\Phi(X^j)$.
2. Ici $\mathscr{B}' = (L_1, \dots, L_n)$ et
   $\mathscr{C} = \big((1,0,\dots,0), (0,1,0,\dots,0), \dots, (0,\dots,0,1)\big)$ donc la matrice est de taille $n\times n$ et pour calculer les coefficients sur la j^{e} colonne, il suffit de calculer $\Phi(L_j)$.

5

- *Noyau*. Suivre le savoir-faire SF 3.
  On commence par : « Soit $P = aX^2+bX+c \in \mathbb{R}_2[X]$ » ensuite par équivalence :

$$f(\underbrace{P}_{\substack{\text{Espace de}\\ \text{départ :}\\ \mathbb{R}_2[X]}}) = \underbrace{(0,0,0)}_{\substack{\text{Espace}\\ \text{d'arrivée : } \mathbb{R}^3}} \iff A \times \underbrace{\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Coordonnées de}\\ P \text{ dans } (1,X,X^2)}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Il suffit ensuite de résoudre le système.
  Attention : une fois le système résolu, ne pas oublier de revenir à $P = \dots$.
  Réponse : $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(X^2+4X-2)$.
- *Image*. $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big(f(1), f(X), f(X^2)\big)$
  Ici les vecteurs $f(1), f(X), f(X^2) \in \mathbb{R}^2$ se lisent sur les colonnes de A
  Chasser enfin du Vect les vecteurs combinaisons linéaires.
  Réponse : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big((1,2),(0,1)\big)$

6

- *Noyau*. Suivre le savoir-faire SF 3.
  On commence par : « Soit $P = aX^3+bX^2+cX+d \in \mathbb{R}_3[X]$ » ensuite par équivalence :

$$f(\underbrace{P}_{\substack{\text{Espace de}\\ \text{départ :}\\ \mathbb{R}_3[X]}}) = \underbrace{0}_{\substack{\text{Polynôme nul}\\ \text{car l'espace}\\ \text{d'arrivée est}\\ \mathbb{R}_3[X]}} \iff A \times \underbrace{\begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Coordonnées de}\\ P \text{ dans}\\ (1,X,X^2,X^3)}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- *Image*. $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3)\big)$
  et les polynômes $f(1), f(X), f(X^2), f(X^3) \in \mathbb{R}_3[X]$ se lisent sur les colonnes de A
  Chasser enfin du Vect les vecteurs combinaisons linéaires

7

1. Il y a deux points à montrer :
   - *f est linéaire.*
   - *f est à valeurs dans* $\mathbb{R}_3[X]$. Pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$, il s'agit de justifier que $f(P) = (3X+1)P + (1-X^2)P' \in \mathbb{R}_3[X]$
2. *Réponse :* $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
3. - *Noyau*. Suivre le savoir-faire SF 3.
     On commence par : « Soit $P = aX^3+bX^2+cX+d \in \mathbb{R}_3[X]$ » ensuite par équivalence :

$$\varphi(\underbrace{P}_{\substack{\text{Espace de}\\ \text{départ :}\\ \mathbb{R}_3[X]}}) = \underbrace{0}_{\substack{\text{Polynôme nul}\\ \text{car l'espace}\\ \text{d'arrivée est}\\ \mathbb{R}_3[X]}} \iff M \times \underbrace{\begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Coordonnées de}\\ P \text{ dans}\\ (1,X,X^2,X^3)}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

     Réponse : $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Vect}(X^3-X^2-X+1)$
   - *Image*. Deux possibilités :
     - *Méthode 1*. A partir de
       $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Vect}\big(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2), \varphi(X^3)\big)$
       en « chassant » ensuite dans le Vect

- *Méthode 2.* Avec le théorème du rang $\dim \operatorname{Im} \varphi = 3$. Il suffit donc de trouver une famille libre de $\operatorname{Im} \varphi$ de cardinal 3 : on se contente de vérifier que $(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2))$ est libre.

8 **1.** Procéder par inclusion dimension pour les deux égalités.
On sait déjà que $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$.
On peut montrer que $\dim \operatorname{Im} f^2 = 2$.
En effet $A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}} f^2$ où $\mathscr{B} = \big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ donc avec les colonnes de A on peut déterminer une base de $\operatorname{Im} f^2$.
Vu que $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}^3$: $\quad \dim \operatorname{Im} f = 2$ ou 3.
Il suffit de montrer que $\dim \operatorname{Im} f \neq 3$. Procéder par l'absurde : si $\dim \operatorname{Im} f = 3$, f serait surjective donc aussi bijective et on peut en déduire une contradiction avec la matrice M.
Une fois $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$ démontré, on a l'égalité des dimension de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker} f^2$ (th du rang) et $\operatorname{Ker} f^2 \subset \operatorname{Ker} f$ est toujours vraie.

2. Traduire les colonnes de M pour trouver les conditions exigées sur f. Il s'agit en fait de montrer que :

- $(1,0,0) \in \operatorname{Ker} f$
- $f(0,1,0)$ et $f(0,0,1)$ appartiennent à $\operatorname{Vect}\big((1,0,0),(0,1,0)\big)$

Aussi

- Avec **1.** $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$ et $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$
- On dispose de $A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}} f^2$ sur laquelle on peut constate que :
  - $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Vect}\big((1,0,0)\big)$
  - $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Vect}\big((1,0,0),(0,1,0)\big)$

3. Les questions **1.** et **2.** constituent la phase d'analyse du problème : si $M \in \mathscr{S}$ alors M est de la forme trouvée à la question **2.**. Tester les candidats obtenus : calculer M^2 et montrer qu'il est impossible d'obtenir A.

9 On note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(e_1, u)$ où $u = (a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)$.

2. Si $\lambda = 0$,$\dim \operatorname{Ker} f = n-2$ avec la question **1.**.
Pour $\lambda \neq 0$ et $u = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$f(u) = \lambda u \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

Echelonner le système et constater, en posant $s = a_1^2 + \cdots + a_{n-1}^2 \neq 0$, que :

- Si $-\lambda^2 + a_n\lambda + s \neq 0$, alors $f(u) = \lambda u$ ssi $x_1 = \cdots = x_n = 0$.
- Si $-\lambda^2 + a_n\lambda + s = 0$, il y a des solutions autres que le vecteur nul (x_n est arbitraire).

3. Former une base $(b_1, \ldots, b_{n-2}, u_1, u_2)$ de $\mathbb{R}^n$ où

- $(b_1, \ldots, b_{n-2})$ est une base de $\operatorname{Ker} f$.
- $u_1 \in \operatorname{Ker}(f - \lambda_1 \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^n})$ et $u_2 \in \operatorname{Ker}(f - \lambda_2 \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^n})$ où λ_1 et λ_2 sont les racines réelles de $-X^2 + a_n X + s$.

10 **1.** Utiliser la matrice A pour calculer $\varphi(1)$, $\varphi(X)$, $\varphi(X^2)$, $\varphi(X^3)$ et $\varphi(X^4)$ (penser à la formule du binôme).

2. $A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}} \varphi$ où $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3, X^4)$ est la base la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$.
On peut utiliser l'application φ pour

- *Calculer A^{-1}.* En effet $A^{-1} = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}\big(\varphi^{-1}\big)$.
Il suffit donc de trouver φ^{-1} puis d'écrire sa matrice.
- *Calculer A^k.* En effet $A^k = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}\big(\varphi^k\big)$.
Il suffit donc de calculer $\varphi^k = \varphi \circ \varphi \circ \cdots \circ \varphi$ puis d'écrire sa matrice.

Réponse à trouver : $A^k = \begin{pmatrix} 1 & k & k^2 & k^3 & k^4 \\ & 1 & 2k & 3k^2 & 4k^3 \\ & & 1 & 3k & 6k^2 \\ & & & 1 & 4k \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$

et la formule vaut aussi pour $k = -1$

11 **1.** *Matrice de φ.* $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

2. Suivre le savoir-faire **SF 3** .
On commence par : « Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$ » ensuite par équivalence :

$$P \in \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \operatorname{Id}) \Leftrightarrow \varphi(P) = \lambda P$$

$$\Leftrightarrow A \times \underbrace{\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Coordonnées de} \\ P \text{ dans } (1,X,X^2)}} = \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Coordonnées de} \\ P \text{ dans } (1,X,X^2)}}$$

Ensuite distinguer des cas selon que des coefficients diagonaux soient nuls ou non : *Réponse :*

- Si $\lambda \notin 1,2,5$: $\quad \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \operatorname{Id}) = \{0\}$
- $\operatorname{Ker}(\varphi - 5\operatorname{Id}) = \operatorname{Vect}\big(X^2 + \frac{2}{3}X + \frac{7}{6}\big)$.
- $\operatorname{Ker}(\varphi - \operatorname{Id}) = \operatorname{Vect}(1)$
- $\operatorname{Ker}(\varphi - 2\operatorname{Id}) = \operatorname{Vect}(1 + X)$

3. La base $\big(1, 1+X, X^2 + \frac{2}{3}X + \frac{7}{6}\big)$ convient

12 **1.** Par construction : $E = \operatorname{Vect}(f_1, f_2, f_3)$ où $f_1 : x \mapsto e^x$, $f_2 : x \mapsto xe^x$ et $f_1 : x \mapsto x^2 e^x$.
Il reste à prouver la liberté de $\mathscr{B} = (f_1, f_2, f_3)$.

2. Il y a deux points à vérifier :

- *φ est linéaire.*
- *φ est à valeurs dans E*

3. Procéder colonne par colonne *Réponse :* $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calculer A^{-1} par la méthode du pivot.

Réponse : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Posant $f : x \mapsto (x^2 + x + 1)e^x$ *i.e.* $f = f_1 + f_2 + f_3$, il s'agit de trouver F telle que $\varphi(F) = f$.
Si on cherche $F = af_1 + bf_2 + cf_3 \in E$ on peut traduire matriciellement l'équation :

$$\varphi(F) = f \Leftrightarrow A \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{\substack{\text{coordonnées} \\ \text{de } F \text{ dans } \mathscr{B}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{coordonnées} \\ \text{de } F \text{ dans } \mathscr{B}}}$$

Il suffit d'utiliser A^{-1} pour trouver $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et donc F.

13 Stratégie :

1. Ecrire la matrice A de φ dans la base canonique
2. Trouver A^{-1}
3. Trouver φ^{-1} via $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}\big(\varphi^{-1}\big) = A^{-1}$.

Quelques détails pour chacune des étapes ci-dessus :

1. La matrice A est de taille $n \times n$ et ses coef se trouvent en calculant $\varphi(X^j)$ pour $0 \leq j \leq n-1$. Il faut faire attention au « décalage » d'indice, le calcul de $\varphi(X^j)$ donne la $j+1^e$ colonne de A : si $\varphi(X^j) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1,j+1} X^i$.

   Réponse : $A = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\omega^{(i-1)(j-1)}\right)_{1\leq i,j\leq n}$.
2. Calculer $A \times \overline{A}$.
3. La matrice de φ^{-1} s'obtient en changeant ω en $\overline{\omega}$ dans celle de φ : il suffit d'en faire de même pour passer de $\varphi(P)$ à $\varphi^{-1}(P)$.

14 **1.** Montrer que $F \cap G = \{0\}$ et que $\dim F + \dim G + 3$.

2. On cherche λ, a, b, c tels que : $\begin{cases} (a,b,c) + \lambda(1,2,3) = (x,y,z) \\ (a,b,c) \in F \\ \left(\lambda(1,2,3) \in G\right) \end{cases}$

On résout le système, puis $p(x,y,z) = (a,b,c)$ (composante de u selon F).
On calcule ensuite $p(1,0,0)$, $p(0,1,0)$ puis $p(0,0,1)$

3. Considérer une base $\mathscr{B}' = \left(u_1, u_2, v\right)$ adaptée à $F \oplus G$.

15
- *Analyse du problème*. Une telle base $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ vérifie nécessairement
  $f(b_1) = b_2, \quad f(b_2) = b_3, \quad \ldots \quad f(b_{n-1}) = b_n \quad$ et $\quad f(b_n) = 0$
  i.e. $b_1 \in \operatorname{Ker} f^n \setminus \operatorname{Ker} f^{n-1}$ puis :
  $$b_2 = f(b_1), \quad b_3 = f^2(b_1), \quad \ldots, b_n = f^{n-1}(b_1)$$
- *Synthèse*. Fixer $e \in E$ tel que $f^{n-1}(e) \neq 0$ (après avoir justifié qu'un tel vecteur existe) et montrer que $(e, f(e), \ldots, f^{n-1}(e))$ est une base de E.

16 **1.**
- *s est une symétrie*. On sait que s est une symétrie ssi $s^2 = \mathrm{Id}$ donc ssi $A^2 = I_2$.
- *Base de $F = \operatorname{Inv} s$*. Fixer $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$:
  $$u \in F \Leftrightarrow s(u) = u \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
  il suffit ensuite de résoudre le système.
- *Base de $G = \operatorname{AntiInv} s$*. Fixer $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$:
  $$u \in G \Leftrightarrow s(u) = u \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
  il suffit ensuite de résoudre le système.

2. Considérer une base (u_1, u_2) adaptée $F \oplus G$

17 **1.** Calculer A^2

2. Suivre le savoir-faire SF 3 . Fixer $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ puis utiliser A
$$u \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f(u) = (0,0,0) \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Suivre le savoir-faire SF 7 :
- *Analyse du problème* On cherche une base $\mathscr{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que
$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}} f = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(b_1) & f(b_2) & f(b_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{coordonnée selon } b_1 \\ \leftarrow \text{coordonnée selon } b_2 \\ \leftarrow \text{coordonnée selon } b_3 \end{array}$$
  c'est à dire telle
  $$(1) \quad b_1, b_3 \in \operatorname{Ker} f \qquad \text{et} \qquad (2) \quad f(b_2) = b_1$$
- *Synthèse* Il s'agit de trouver une base $\mathscr{B} = (b_1, b_2, b_3)$ qui vérifie les conditions (1), (2) et (3) ci-dessus.
  Commencer par b_2 :
  - Chercher $b_2 \in \operatorname{Ker} f^2 \setminus \operatorname{Ker} f$
  - Calculer $b_1 = f(b_2)$
  - Prendre $b_3 \in \operatorname{Ker} f$ mais pas colinéaire à b_1.

  Ensuite :
  - Justifier que $\mathscr{B} = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
  - C'est tout ! Par construction $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}} f = B$.

18 **1.** Utiliser la matrice A. Pour $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:
- $u \in \operatorname{Ker}(f - 2\mathrm{Id}) \Leftrightarrow (A - 2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $u \in \operatorname{Ker}\left((f + \mathrm{Id})^2\right) \Leftrightarrow (A + I_3)^2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (note [1])

2. Suivre le savoir-faire SF 7 :
- *Analyse du problème* On cherche une base $\mathscr{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que
$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}} f = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(b_1) & f(b_2) & f(b_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{coordonnée selon } b_1 \\ \leftarrow \text{coordonnée selon } b_2 \\ \leftarrow \text{coordonnée selon } b_3 \end{array}$$
  c'est à dire telle que :
  $$\begin{cases} f(b_1) = 2b_1 & \text{i.e. } b_1 \in \operatorname{Ker}(f - 2\mathrm{Id}) \\ f(b_2) = -b_2 + 2b_3 & \text{i.e. } (f + \mathrm{Id})(b_2) = 2b_3 \\ f(b_3) = -b_3 & \text{i.e. } b_3 \in \operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id}) \end{cases}$$
  Ainsi :

  (1) $b_2 \in \operatorname{Ker}\left((f + \mathrm{Id})^2\right)$ mais $b_2 \notin \operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id})$ (note [2]).

  (2) $b_3 = \frac{1}{2}(f + \mathrm{Id})(b_2)$.

  (3) $b_1 \in \operatorname{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$
- *Synthèse* Trouver une base $\mathscr{B} = (b_1, b_2, b_3)$ qui vérifie les conditions (1), (2) et (3) ci-dessus.
  Concrètement :
  - La question 1 permet de définir b_1 et b_2
  - Prendre $b_3 = \frac{1}{2}(f + \mathrm{Id})(b_2)$

1. Pour calculer $(A + I_3)^2$, il est maladroit d'utiliser $(A + I_3)^2 = A^2 + 2A + I_3$. Le plus simple est de calculer $B = A + I_3$ puis d'élever au carré
2. si $b_2 \in \operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id})$ alors $b_3 = 0$ et la famille n'est pas libre

19 • *Analyse du problème.* Il s'agit de prouver qu'il existe une base $\mathscr{B} = (b_1, \dots, b_{n-r}, c_1, \dots, c_r)$ de E t.q.

$$\begin{cases} f(b_1) = \cdots = f(b_{n-r}) = 0 \\ f(c_1) = b_1 \\ f(c_2) = b_2 \\ \dots \\ f(c_r) = b_r \end{cases} \quad \textit{i.e.} \quad \begin{cases} b_1, \dots, b_{n-r} \in \operatorname{Ker} f \\ c_1, \dots, c_r \notin \operatorname{Ker} f \\ b_1 = f(c_1) \\ \\ \dots \\ b_r = f(c_r) \end{cases}$$

- *Synthèse*. Définir $c_1, \dots, c_r$ en considérant un supplémentaire S de $\operatorname{Ker} f$. Définir ensuite $b_1, \dots, b_r$ puis compléter en une base $(b_1, \dots, b_{n-r})$ de $\operatorname{Ker} f$.

20 **1.** Procéder par inclusion-dimension. Pour les dimension, le fait que g soit un automorphisme assure en particulier que $\dim\big(g(F)\big) = \dim F$ et $\dim\big(g(G)\big) = G$.

2. Considérer une base $(b_1, \dots, b_m)$ de F et montrer que la famille $\mathscr{C} = \big(b_1, \dots, b_m, g(b_1), \dots, g(b_m)\big)$ satisfait les conditions requises.

21

- Commencer par montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$
- A l'aide de ce qui précède, montrer que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.
- Considérer une base adaptée à $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

22 **1.** Fixer $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$u \in \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}) \Leftrightarrow f(u) = u \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Réponse : $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}) = \operatorname{Vect}(u_1, u_2)$.

2. Il suffit de calculer le produit $(A - I_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Ne pas utiliser de formule de changement de base ici : revenir à la définition

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'} f = \begin{array}{c} f(u_1) \quad f(u_2) \quad f(u_3) \\ \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \\ \begin{pmatrix} a & \cdot & \cdot \\ b & \cdot & \cdot \\ c & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{ coordonnée selon } u_1 \\ \leftarrow \text{ coordonnée selon } u_2 \\ \leftarrow \text{ coordonnée selon } u_3 \end{array}$$

Important :

Ce qui nous intéresse ce n'est pas la valeur de $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(u_3)$ mais leurs coordonnées dans la base (u_1, u_2, u_3). Par exemple, pour trouver la première colonne il suffit d'écrire $f(u_1)$ comme une CL de u_1, u_2, u_3 i.e. *sous la forme : $f(u_1) = a \times u_1 + b \times u_2 + c \times u_3$*

4. Utiliser la formule du changement de base.
En notant $\mathscr{B} = \big((1,0,0), (0,1,0)(0,0,1)\big)$ la base canonique : $\quad A = PTP^{-1}$ où $P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$.
Ainsi (par récurrence) : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PT^nP^{-1}$.

23 **1.** • *Base de* $F = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$.

Commencer par « Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ » ensuite :

$$u \in \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}) \Leftrightarrow f(u) = u \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Réponse :
$F = \operatorname{Vect}(u_1, u_2)$ où $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 0, 1)$.

- *Base de* $G = \operatorname{Ker}(f + 2\operatorname{Id})$.
  Réponse : $G = \operatorname{Vect}(u_3)$ où $u_3 = (-1, 1, 1)$.

2. Vérifier que :

- $\dim F + \dim G = \dim \mathbb{R}^3$.
- $F \cap G = \{(0, 0, 0)\}$.

3. *Réponse à trouver :* $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

4. Utiliser la formule du changement de base pour les endomorphismes

24 **1.** • *Base du Noyau.* $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\big(u_1, \dots, u_{n-1}\big)$ où $u_1 = (-1, 1, \dots, 0)$, $u_2 = (-1, 0, 1, \dots, 0)$, $\dots$ $u_{n-1} = (-1, 0, \dots, 0, 1)$.

- *Base de l'image.* $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big(\underbrace{(1, \dots, 1)}_{=v}\big)$

2. Vérifier que :

- $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^n$.
- $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.

3. *Réponse :* $D = \begin{pmatrix} 0 & \dots & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix}$.

Pour le lien entre J et D c'est la formule du changement de base pour les endomorphismes

25 **1. a)** $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Vect}(u_1, u_2)$ où $u_1 = (1, 1, 0, 0)$ et $u_2 = (-1, 0, 1, 0)$

b) La première colonne de $(A - I_4)^2$ est nulle : cela indique que $(f - \operatorname{Id})^2(e_1) = (0, 0, 0, 0)$.

2. Suivre le savoir-faire SF 7 :

- *Analyse du problème* On cherche une base $\mathscr{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ de $\mathbb{R}^4$ telle que

$$\begin{cases} f(b_1) = 0 & \text{i.e. } b_1 \in \operatorname{Ker} f \\ f(b_2) = b_1 & \\ f(b_3) = b_3 & \text{i.e. } b_3 \in \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}) \\ f(b_4) = b_3 + b_4 & \text{i.e. } (f - \operatorname{Id})(b_4) = b_3 \end{cases}$$

On cherche donc une base (b_1, b_2, b_3, b_4) telle que

(1) $b_2 \in \operatorname{Ker}\big(f^2\big)$ mais $b_2 \notin \operatorname{Ker} f$ (note [3]).

(2) $b_1 = f(b_2)$

(3) $b_4 \in \operatorname{Ker}\big((f - \operatorname{Id})^2\big)$ mais $b_4 \notin \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$

(4) $b_3 = (f - \operatorname{Id})(b_4)$.

- *Synthèse* Trouver une base $\mathscr{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ qui vérifie les conditions (1), (2), (3) et (4) avec **1.**

3. Utiliser la formule du changement de base pour les endomorphismes.

3. si $b_2 \in \operatorname{Ker} f$ alors $b_1 = 0$ et la famille n'est pas libre