

1

Commentaire

Suivre la stratégie du savoir faire **SF 1** :

- Commencer par déterminer la taille de la matrice :
 - nombre de colonnes = dimension de l'espace de départ
 - nombre de lignes = dimension de l'espace d'arrivée
- On calcule $f(b_1)$ et on met ses coordonnées dans la première colonne
- On calcule $f(b_2)$ et on met ses coordonnées dans la deuxième colonne
- ...
- On calcule $f(b_n)$ et on met ses coordonnées dans la dernière colonne

2

- Ici $\mathcal{B} = \mathcal{C} = (1, X, \dots, X^n)$ donc la matrice est de taille $(n+1) \times (n+1)$ et pour calculer les coefficients sur la k^e colonne, il suffit de calculer $f(X^k)$.
- Ici $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ et $\mathcal{C} = (1, X)$ donc la matrice possède 2 lignes et $n+1$ colonnes. Pour calculer les coefficients de la k^e colonne il suffit de calculer $f(X^k)$ i.e. de calculer le reste de la division euclidienne de X^k par $X^2 - 3X + 2$: si le reste est $a_k X + b_k$ alors la k^e colonne sera $\begin{pmatrix} b_k \\ a_k \end{pmatrix}$.

- La matrice est de taille $(n+1) \times (n+1)$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & X+a & (X+a)^2 & (X+a)^3 & \dots & (X+a)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 1 \\ \leftarrow X \\ \leftarrow X^2 \\ \leftarrow X^3 \\ \leftarrow \vdots \\ \leftarrow X^n \end{matrix}$$

Pour calculer les coefficients sur la j^e colonne, il suffit de développer $(X+a)^j$.

- La matrice est de taille $(n+1) \times (n+1)$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & X & X^2 & X^3 & \dots & X^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 1 \\ \leftarrow X-a \\ \leftarrow (X-a)^2 \\ \leftarrow (X-a)^3 \\ \leftarrow \vdots \\ \leftarrow (X-a)^n \end{matrix}$$

La j^e colonne est formée des coordonnées de $P_j = X^j$ dans la base $(1, (X-a), \dots, (X-a)^n)$. Il s'agit donc d'exprimer $P_j = X^j$ comme une combinaison linéaire de $(1, (X-a), \dots, (X-a)^n)$.

4

- Ici $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^{n-1})$ et $\mathcal{C} = ((1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1))$ donc la matrice est de taille $n \times n$ et pour calculer les coefficients sur la j^e colonne, il suffit de calculer $\Phi(X^j)$.
- Ici $\mathcal{B}' = (L_1, \dots, L_n)$ et $\mathcal{C} = ((1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1))$ donc la ma-

trice est de taille $n \times n$ et pour calculer les coefficients sur la j^e colonne, il suffit de calculer $\Phi(L_j)$.

5

- Noyau.** Suivre le savoir-faire **SF 3**.

On commence par : « Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$ » ensuite par équivalence :

$$f\left(\underbrace{P}_{\substack{\text{Espace de} \\ \text{départ :} \\ \mathbb{R}_2[X]}}\right) = \underbrace{(0, 0, 0)}_{\substack{\text{Espace} \\ \text{d'arrivée :} \\ \mathbb{R}^3}} \iff A \times \underbrace{\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Coordonnées de} \\ P \text{ dans } (1, X, X^2)}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il suffit ensuite de résoudre le système.

Attention : une fois le système résolu, ne pas oublier de revenir à $P = \dots$

Réponse : $\text{Ker } f = \text{Vect}(X^2 + 4X - 2)$.

- Image.** $\text{Im } f = \text{Vect}(f(1), f(X), f(X^2))$

Ici les vecteurs $f(1), f(X), f(X^2) \in \mathbb{R}^2$ se lisent sur les colonnes de A

Chasser enfin du Vect les vecteurs combinaisons linéaires.

Réponse : $\text{Im } f = \text{Vect}((1, 2), (0, 1))$

6

- Noyau.** Suivre le savoir-faire **SF 3**.

On commence par : « Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$ » ensuite par équivalence :

$$f\left(\underbrace{P}_{\substack{\text{Espace de} \\ \text{départ :} \\ \mathbb{R}_3[X]}}\right) = \underbrace{0}_{\substack{\text{Polynôme nul} \\ \text{car l'espace} \\ \text{d'arrivée est} \\ \mathbb{R}_3[X]}} \iff A \times \underbrace{\begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Coordonnées de} \\ P \text{ dans} \\ (1, X, X^2, X^3)}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Image.** $\text{Im } f = \text{Vect}(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3))$

et les polynômes $f(1), f(X), f(X^2), f(X^3) \in \mathbb{R}_3[X]$ se lisent sur les colonnes de A

Chasser enfin du Vect les vecteurs combinaisons linéaires

7

- Il y a deux points à montrer :

- f est linéaire.
- f est à valeurs dans $\mathbb{R}_3[X]$. Pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$, il s'agit de justifier que $f(P) = (3X+1)P + (1-X^2)P' \in \mathbb{R}_3[X]$

$$2. \text{ Réponse : } M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Noyau.** Suivre le savoir-faire **SF 3**.

On commence par : « Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$ » ensuite par équivalence :

$$\varphi\left(\underbrace{P}_{\substack{\text{Espace de} \\ \text{départ :} \\ \mathbb{R}_3[X]}}\right) = \underbrace{0}_{\substack{\text{Polynôme nul} \\ \text{car l'espace} \\ \text{d'arrivée est} \\ \mathbb{R}_3[X]}} \iff M \times \underbrace{\begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Coordonnées de} \\ P \text{ dans} \\ (1, X, X^2, X^3)}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Réponse : $\text{Ker } \varphi = \text{Vect}(X^3 - X^2 - X + 1)$

- Image.** Deux possibilités :

- Méthode 1.** A partir de

$$\text{Im } \varphi = \text{Vect}(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2), \varphi(X^3))$$

en « chassant » ensuite dans le Vect

- *Méthode 2.* Avec le théorème du rang $\dim \operatorname{Im} \varphi = 3$.
Il suffit donc de trouver une famille libre de $\operatorname{Im} \varphi$ de cardinal 3 : on se contente de vérifier que $(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2))$ est libre.

8 1. Procéder par inclusion dimension pour les deux égalités.

On sait déjà que $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$.

On peut montrer que $\dim \operatorname{Im} f^2 = 2$.

En effet $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f^2$ où $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ donc avec les colonnes de A on peut déterminer une base de $\operatorname{Im} f^2$.

Vu que $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}^3$: $\dim \operatorname{Im} f = 2$ ou 3.

Il suffit de montrer que $\dim \operatorname{Im} f \neq 3$. Procéder par l'absurde : si $\dim \operatorname{Im} f = 3$, f serait surjective donc aussi bijective et on peut en déduire une contradiction avec la matrice M .

Une fois $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$ démontré, on a l'égalité des dimensions de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker} f^2$ (th du rang) et $\operatorname{Ker} f^2 \subset \operatorname{Ker} f$ est toujours vraie.

2. Traduire les colonnes de M pour trouver les conditions exigées sur f . Il s'agit en fait de montrer que :

- $(1, 0, 0) \in \operatorname{Ker} f$
- $f(0, 1, 0)$ et $f(0, 0, 1)$ appartiennent à $\operatorname{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$

Aussi

- Avec 1. $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$ et $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$
- On dispose de $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f^2$ sur laquelle on peut constater que :

- $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Vect}((1, 0, 0))$
- $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$

3. Les questions 1. et 2. constituent la phase d'analyse du problème : si $M \in \mathcal{S}$ alors M est de la forme trouvée à la question 2.. Tester les candidats obtenus : calculer M^2 et montrer qu'il est impossible d'obtenir A .

9 On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(e_1, u)$ où $u = (a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)$.

2. Si $\lambda = 0$, $\dim \operatorname{Ker} f = n - 2$ avec la question 1..

Pour $\lambda \neq 0$ et $u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$f(u) = \lambda u \Leftrightarrow (A - \lambda I_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

Echelonner le système et constater, en posant $s = a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2 \neq 0$, que :

- Si $-\lambda^2 + a_n \lambda + s \neq 0$, alors $f(u) = \lambda u$ ssi $x_1 = \dots = x_n = 0$.
- Si $-\lambda^2 + a_n \lambda + s = 0$, il y a des solutions autres que le vecteur nul (x_n est arbitraire).

3. Former une base $(b_1, \dots, b_{n-2}, u_1, u_2)$ de $\mathbb{R}^n$ où

- $(b_1, \dots, b_{n-2})$ est une base de $\operatorname{Ker} f$.
- $u_1 \in \operatorname{Ker}(f - \lambda_1 \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^n})$ et $u_2 \in \operatorname{Ker}(f - \lambda_2 \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^n})$ où λ_1 et λ_2 sont les racines réelles de $-X^2 + a_n X + s$.

10 1. Utiliser la matrice A pour calculer $\varphi(1)$, $\varphi(X)$, $\varphi(X^2)$, $\varphi(X^3)$ et $\varphi(X^4)$ (penser à la formule du binôme).

2. $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} \varphi$ où $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3, X^4)$ est la base la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$.

On peut utiliser l'application φ pour

- Calculer A^{-1} . En effet $A^{-1} = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^{-1})$.

Il suffit donc de trouver φ^{-1} puis d'écrire sa matrice.

- Calculer A^k . En effet $A^k = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^k)$.

Il suffit donc de calculer $\varphi^k = \varphi \circ \varphi \circ \dots \circ \varphi$ puis d'écrire sa matrice.

$$\text{Réponse à trouver : } A^k = \begin{pmatrix} 1 & k & k^2 & k^3 & k^4 \\ & 1 & 2k & 3k^2 & 4k^3 \\ & & 1 & 3k & 6k^2 \\ & & & 1 & 4k \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

et la formule vaut aussi pour $k = -1$

11 1. Matrice de φ . $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

2. Suivre le savoir-faire SF 3.

On commence par : « Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$ » ensuite par équivalence :

$$P \in \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \operatorname{Id}) \Leftrightarrow \varphi(P) = \lambda P$$

$$\Leftrightarrow A \times \underbrace{\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Coordonnées de} \\ P \text{ dans } (1, X, X^2)}} = \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Coordonnées de} \\ P \text{ dans } (1, X, X^2)}}$$

Ensuite distinguer des cas selon que des coefficients diagonaux soient nuls ou non : Réponse :

- Si $\lambda \notin 1, 2, 5$: $\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \operatorname{Id}) = \{0\}$
- $\operatorname{Ker}(\varphi - 5 \operatorname{Id}) = \operatorname{Vect}(X^2 + \frac{2}{3}X + \frac{7}{6})$.
- $\operatorname{Ker}(\varphi - \operatorname{Id}) = \operatorname{Vect}(1)$
- $\operatorname{Ker}(\varphi - 2 \operatorname{Id}) = \operatorname{Vect}(1 + X)$

3. La base $(1, 1 + X, X^2 + \frac{2}{3}X + \frac{7}{6})$ convient

12 1. Par construction : $E = \operatorname{Vect}(f_1, f_2, f_3)$ où $f_1 : x \mapsto e^x$,

$f_2 : x \mapsto xe^x$ et $f_3 : x \mapsto x^2e^x$.

Il reste à prouver la liberté de $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$.

2. Il y a deux points à vérifier :

- φ est linéaire.
- φ est à valeurs dans E

3. Procéder colonne par colonne Réponse : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calculer A^{-1} par la méthode du pivot.

$$\text{Réponse : } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Posant $f : x \mapsto (x^2 + x + 1)e^x$ i.e. $f = f_1 + f_2 + f_3$, il s'agit de trouver F telle que $\varphi(F) = f$.

Si on cherche $F = af_1 + bf_2 + cf_3 \in E$ on peut traduire matriciellement l'équation :

$$\varphi(F) = f \Leftrightarrow A \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{\substack{\text{coordonnées} \\ \text{de } F \text{ dans } \mathcal{B}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{coordonnées} \\ \text{de } F \text{ dans } \mathcal{B}}}$$

Il suffit d'utiliser A^{-1} pour trouver $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et donc F .

13 Stratégie :

1. Ecrire la matrice A de φ dans la base canonique
2. Trouver A^{-1}
3. Trouver φ^{-1} via $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^{-1}) = A^{-1}$.

Quelques détails pour chacune des étapes ci-dessus :

1. La matrice A est de taille $n \times n$ et ses coef se trouvent en calculant $\varphi(X^j)$ pour $0 \leq j \leq n-1$. Il faut faire attention au « décalage » d'indice, le calcul de $\varphi(X^j)$

donne la $j+1^{\text{e}}$ colonne de A : si $\varphi(X^j) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1,j+1} X^i$.

Réponse : $A = \frac{1}{\sqrt{n}} (\omega^{(i-1)(j-1)})_{1 \leq i,j \leq n}$.

2. Calculer $A \times \bar{A}$.
3. La matrice de φ^{-1} s'obtient en changeant ω en $\bar{\omega}$ dans celle de φ : il suffit d'en faire de même pour passer de $\varphi(P)$ à $\varphi^{-1}(P)$.

- 14** Si $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ est une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale, considérer la famille $(u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{L}(E)$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_{i,j}) = E_{i,j}$ pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Précisément, si $f(b_i) = \lambda_i b_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on constate que $A_f(u_{i,j}) = (\lambda_i - \lambda_j) u_{i,j}$ pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- 15** 1. Montrer que $F \cap G = \{0\}$ et que $\dim F + \dim G = 3$.

2. On cherche λ, a, b, c tels que :
$$\begin{cases} (a, b, c) + \lambda(1, 2, 3) = (x, y, z) \\ (a, b, c) \in F \\ \lambda(1, 2, 3) \in G \end{cases}$$

On résout le système, puis $p(x, y, z) = (a, b, c)$ (composante de u selon F).

On calcule ensuite $p(1, 0, 0)$, $p(0, 1, 0)$ puis $p(0, 0, 1)$

3. Considérer une base $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, v)$ adaptée à $F \oplus G$.

- 16** • *Analyse du problème.* Une telle base $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ vérifie nécessairement $f(b_1) = b_2, f(b_2) = b_3, \dots, f(b_{n-1}) = b_n$ et $f(b_n) = 0$ i.e. $b_1 \in \text{Ker } f^n \setminus \text{Ker } f^{n-1}$ puis : $b_2 = f(b_1), b_3 = f^2(b_1), \dots, b_n = f^{n-1}(b_1)$

- *Synthèse.* Fixer $e \in E$ tel que $f^{n-1}(e) \neq 0$ (après avoir justifié qu'un tel vecteur existe) et montrer que $(e, f(e), \dots, f^{n-1}(e))$ est une base de E .

- 17** 1. • *s est une symétrie.* On sait que s est une symétrie ssi $s^2 = \text{Id}$ donc ssi $A^2 = I_2$.

- *Base de $F = \text{Inv } s$.* Fixer $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$u \in F \Leftrightarrow s(u) = u \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

il suffit ensuite de résoudre le système.

- *Base de $G = \text{AntiInv } s$.* Fixer $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$u \in G \Leftrightarrow s(u) = -u \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

il suffit ensuite de résoudre le système.

2. Considérer une base (u_1, u_2) adaptée $F \oplus G$

- 18** 1. Calculer A^2

2. Suivre le savoir-faire **SF 3**. Fixer $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ puis utiliser A

$$u \in \text{Ker } f \Leftrightarrow f(u) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Suivre le savoir-faire **SF 7** :

- *Analyse du problème* On cherche une base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} f(b_1) & f(b_2) & f(b_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{coordonnée selon } b_1 \\ \leftarrow \text{coordonnée selon } b_2 \\ \leftarrow \text{coordonnée selon } b_3 \end{array}$$

c'est à dire telle

$$(1) \quad b_1, b_3 \in \text{Ker } f \quad \text{et} \quad (2) \quad f(b_2) = b_1$$

- *Synthèse* Il s'agit de trouver une base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ qui vérifie les conditions (1), (2) et (3) ci-dessus. Commencer par b_2 :

- Chercher $b_2 \in \text{Ker } f^2 \setminus \text{Ker } f$
- Calculer $b_1 = f(b_2)$
- Prendre $b_3 \in \text{Ker } f$ mais pas colinéaire à b_1 .

Ensuite :

- Justifier que $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- C'est tout ! Par construction $\text{Mat}_{\mathcal{B}} f = B$.

- 19** 1. Utiliser la matrice A . Pour $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$u \in \text{Ker}(f - 2\text{Id}) \Leftrightarrow (A - 2I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u \in \text{Ker}((f + \text{Id})^2) \Leftrightarrow (A + I_3)^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{note } ^1)$$

2. Suivre le savoir-faire **SF 7** :

- *Analyse du problème* On cherche une base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} f(b_1) & f(b_2) & f(b_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{coordonnée selon } b_1 \\ \leftarrow \text{coordonnée selon } b_2 \\ \leftarrow \text{coordonnée selon } b_3 \end{array}$$

c'est à dire telle que :

$$\begin{cases} f(b_1) = 2b_1 & \text{i.e. } b_1 \in \text{Ker}(f - 2\text{Id}) \\ f(b_2) = -b_2 + 2b_3 & \text{i.e. } (f + \text{Id})(b_2) = 2b_3 \\ f(b_3) = -b_3 & \text{i.e. } b_3 \in \text{Ker}(f + \text{Id}) \end{cases}$$

Ainsi :

$$(1) \quad b_2 \in \text{Ker}((f + \text{Id})^2) \text{ mais } b_2 \notin \text{Ker}(f + \text{Id}) \text{ (note } ^2).$$

$$(2) \quad b_3 = \frac{1}{2}(f + \text{Id})(b_2).$$

$$(3) \quad b_1 \in \text{Ker}(f - 2\text{Id})$$

- *Synthèse* Trouver une base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ qui vérifie les conditions (1), (2) et (3) ci-dessus.

Concrètement :

- La question 1 permet de définir b_1 et b_2
- Prendre $b_3 = \frac{1}{2}(f + \text{Id})(b_2)$

1. Pour calculer $(A + I_3)^2$, il est maladroit d'utiliser $(A + I_3)^2 = A^2 + 2A + I_3$. Le plus simple est de calculer $B = A + I_3$ puis d'élever au carré
2. si $b_2 \in \text{Ker}(f + \text{Id})$ alors $b_3 = 0$ et la famille n'est pas libre

- 20** • *Analyse du problème.* Il s'agit de prouver qu'il existe une base $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_{n-r}, c_1, \dots, c_r)$ de E t.q.

$$\begin{cases} f(b_1) = \dots = f(b_{n-r}) = 0 \\ f(c_1) = b_1 \\ f(c_2) = b_2 \\ \dots \\ f(c_r) = b_r \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} b_1, \dots, b_{n-r} \in \text{Ker } f \\ c_1, \dots, c_r \notin \text{Ker } f \\ b_1 = f(c_1) \\ \dots \\ b_r = f(c_r) \end{cases}$$

- *Synthèse.* Définir $c_1, \dots, c_r$ en considérant un supplémentaire S de $\text{Ker } f$. Définir ensuite $b_1, \dots, b_r$ puis compléter en une base $(b_1, \dots, b_{n-r})$ de $\text{Ker } f$.

- 21** 1. Procéder par inclusion-dimension. Pour les dimension, le fait que g soit un automorphisme assure en particulier que $\dim(g(F)) = \dim F$ et $\dim(g(G)) = G$.

2. Considérer une base $(b_1, \dots, b_m)$ de F et montrer que la famille $\mathcal{C} = (b_1, \dots, b_m, g(b_1), \dots, g(b_m))$ satisfait les conditions requises.

22

- Commencer par montrer que $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$
- A l'aide de ce qui précède, montrer que $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$.
- Considérer une base adaptée à $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$.

- 23** 1. Fixer $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$u \in \text{Ker}(f - \text{Id}) \Leftrightarrow f(u) = u \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Réponse : $\text{Ker}(f - \text{Id}) = \text{Vect}(u_1, u_2)$.

2. Il suffit de calculer le produit $(A - I_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Ne pas utiliser de formule de changement de base ici : revenir à la définition

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'} f = \begin{pmatrix} f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a & \cdot & \cdot \\ b & \cdot & \cdot \\ c & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{coordonnée selon } u_1 \\ \leftarrow \text{coordonnée selon } u_2 \\ \leftarrow \text{coordonnée selon } u_3 \end{matrix}$$

Important :

Ce qui nous intéresse ce n'est pas la valeur de $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(u_3)$ mais leurs coordonnées dans la base (u_1, u_2, u_3) . Par exemple, pour trouver la première colonne il suffit d'écrire $f(u_1)$ comme une CL de u_1, u_2, u_3 i.e. sous la forme : $f(u_1) = a \times u_1 + b \times u_2 + c \times u_3$

4. Utiliser la formule du changement de base. En notant $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ la base canonique : $A = PTP^{-1}$ où $P = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$. Ainsi (par récurrence) : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PT^nP^{-1}$.

- 24** 1. • *Base de $F = \text{Ker}(f - \text{Id})$.*

Commencer par « Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ » ensuite :

$$u \in \text{Ker}(f - \text{Id}) \Leftrightarrow f(u) = u \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

3. si $b_2 \in \text{Ker } f$ alors $b_1 = 0$ et la famille n'est pas libre

Réponse :

$F = \text{Vect}(u_1, u_2)$ où $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 0, 1)$.

- *Base de $G = \text{Ker}(f + 2\text{Id})$.*

Réponse : $G = \text{Vect}(u_3)$ où $u_3 = (-1, 1, 1)$.

2. Vérifier que :

- $\dim F + \dim G = \dim \mathbb{R}^3$.
- $F \cap G = \{(0, 0, 0)\}$.

3. Réponse à trouver : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

4. Utiliser la formule du changement de base pour les endomorphismes

- 25** 1. • *Base du Noyau.* $\text{Ker } f = \text{Vect}(u_1, \dots, u_{n-1})$ où $u_1 = (-1, 1, \dots, 0)$, $u_2 = (-1, 0, 1, \dots, 0)$, $\dots$, $u_{n-1} = (-1, 0, \dots, 0, 1)$.

- *Base de l'image.* $\text{Im } f = \text{Vect}(\underbrace{(1, \dots, 1)}_{=v})$

2. Vérifier que :

- $\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}^n$.
- $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$.

3. Réponse : $D = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix}$.

Pour le lien entre J et D c'est la formule du changement de base pour les endomorphismes

- 26** 1. a) $\text{Ker } f^2 = \text{Vect}(u_1, u_2)$ où $u_1 = (1, 1, 0, 0)$ et $u_2 = (-1, 0, 1, 0)$

- b) La première colonne de $(A - I_4)^2$ est nulle : cela indique que $(f - \text{Id})^2(e_1) = (0, 0, 0, 0)$.

2. Suivre le savoir-faire **SF 7** :

- *Analyse du problème* On cherche une base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ de $\mathbb{R}^4$ telle que

$$\begin{cases} f(b_1) = 0 & \text{i.e. } b_1 \in \text{Ker } f \\ f(b_2) = b_1 \\ f(b_3) = b_3 & \text{i.e. } b_3 \in \text{Ker}(f - \text{Id}) \\ f(b_4) = b_3 + b_4 & \text{i.e. } (f - \text{Id})(b_4) = b_3 \end{cases}$$

On cherche donc une base (b_1, b_2, b_3, b_4) telle que

- (1) $b_2 \in \text{Ker}(f^2)$ mais $b_2 \notin \text{Ker } f$ (note ³).
- (2) $b_1 = f(b_2)$
- (3) $b_4 \in \text{Ker}((f - \text{Id})^2)$ mais $b_4 \notin \text{Ker}(f - \text{Id})$
- (4) $b_3 = (f - \text{Id})(b_4)$.

- *Synthèse* Trouver une base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ qui vérifie les conditions (1), (2), (3) et (4) avec **1**.

3. Utiliser la formule du changement de base pour les endomorphismes.