Probabilité uniforme et dénombrement

Situations de type « tirages successifs avec remise »

1 SF 7 On lance un dé équilibré 4 fois de suite.

1. Préciser l'univers associé à cette expérience.
2. Calculer la probabilité d'obtenir :
   a) 4 fois le même numéro
   b) Au moins 2 fois le même numéro
   c) Deux 6 exactement
   d) Une suite de 4 nombres strictement croissante.

2 SF 7 Une urne contient 365 jetons numérotés de 1 à 365. On tire successivement 26 jetons avec remise. Quelle est la probabilité qu'au moins deux tirages donnent le même numéro ?

Situations de type « tirages successifs sans remise »

3 SF 7 SF 11 On effectue trois tirages successifs et sans remise d'une boule dans une urne contenant 4 boules blanches et 6 boules noires, toutes différentiables. Calculer de deux façons la probabilité d'obtenir trois boules blanches :

1. *Première méthode*. En décrivant l'univers associé à l'expérience puis en ayant recours au dénombrement.
2. *Deuxième méthode*. Sans décrire l'univers (supposé construit) et avec la formule des probabilités composées.

Situations de type « tirages simultanés »

4 SF 7 SF 8 Pierre propose à Paul le jeu suivant : Pierre doit tirer 5 cartes dans un jeu de 52 cartes. Si l'as de trèfle fait partie de ces 5 cartes, Paul gagne, sinon Pierre gagne. Quelle est la probabilité que Paul gagne ?

5 SF 7 Un placard contient 10 paires de chaussures toutes différentes. On prend 4 chaussures au hasard. Quelle est la probabilité de tirer :

a) Deux paires complètes b) Au moins une paire ?
c) Une paire et une seule ?

6 SF 7 On possède un jeu de $2n$ cartes ($n \geq 1$) composé de n paires d'animaux. On pioche 2 cartes dans ce jeu. Quelle est la probabilité d'obtenir une paire ? Et si on en pioche 3 ?

7 SF 7 On tire simultanément trois cartes dans un jeu de 32.

1. Préciser l'univers associé à cette expérience ainsi que son cardinal puis calculer la probabilité d'obtenir :
   a) Trois cartes de la même couleur.
   b) Trois cartes de couleurs différentes.
2. Mêmes questions pour des tirages successifs sans remise.
3. Mêmes questions pour des tirages successifs avec remise.

Probabilité d'une intersection

8 SF 9 SF 11 A un arrêt de bus, 10 garçons et 15 filles descendent. Calculer la probabilité que les trois premiers à sortir soient des garçons et la quatrième une fille.

9 SF 8 SF 9 SF 11 Une urne contient n boules rouges et n boules vertes que l'on tire toutes une à une, sans remise.

a) Calculer la probabilité p_n d'avoir un changement de couleur à chaque tirage.
b) Avec la formule de Stirling montrer que : $p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2\sqrt{\pi n}}{2^{2n}}$.

10 SF 9 SF 11 Soit $n \geq 2$. On dispose de n urnes $U_1, U_2, \dots, U_n$. L'urne U_n contient n boules numérotées de 1 à n. On choisit simultanément $n-1$ boules de U_n, que l'on place dans U_{n-1}. On choisit ensuite $n-2$ boules de U_{n-1} que l'on place dans U_{n-2}. On continue ainsi jusqu'à choisir enfin une des deux boules placée dans U_2 pour la mettre dans U_1. Calculer la probabilité de placer la boule numéro 1 dans U_1.

11 SF 8 On lance n fois de suite une pièce équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir au plus un pile ?

12 SF 8 SF 9 SF 11 Une urne contient n boules blanches et autant de boules rouges. On tire N boules en remettant la boule après tirage si elle est rouge et en ne la remettant pas si elle est blanche. Calculer la probabilité $p_{n,N}$ d'obtenir exactement une boule blanche.
Montrer que $p_{n,2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n(e-1)2^{-2n}$

13 SF 7 SF 9 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On choisit au hasard un morphisme de groupe φ de $\mathbb{U}_n^d$ dans $\mathbb{U}_n$. Montrer que φ est surjectif avec probabilité $\displaystyle\prod_{k=1}^{r}\left(1-\frac{1}{p_k^d}\right)$ où $p_1, \dots, p_r$ désignent les facteurs premiers de n

Conditionnement

14 SF 13 *Ex. 105, banque INP* On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Chaque dé pipé donne 6 avec probabilité $\frac{1}{2}$. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

15 SF 13 Trois producteurs A, B et C fournissent respectivement 40%, 40% et 20% des barquettes de lasagnes vendues par un commerçant. Si la viande utilisée est censée être de la viande de bœuf, certaines de ces barquettes sont néanmoins faites à partir de viande de cheval. Les proportions de barquettes à base de viande de cheval sont de 1% pour le producteur A, 2% pour B et 3% pour C. Un contrôleur tire au hasard une barquette dans le stock du commerçant et constate qu'elle est faite à partir de viande de cheval. Quelle est la probabilité qu'elle provienne du producteur A ?

16 SF 10 SF 13 Une urne contient b boules blanches et n boules noires. On tire une boule de cette urne, on note sa couleur et on la remet dans l'urne avec d boules supplémentaires de la même couleur (d étant un entier naturel fixé au préalable). On effectue cette expérience plusieurs fois et on note B_k : « La k^e boule tirée est blanche », pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que $P(B_2) = P(B_1)$
b) Si la seconde boule tirée est blanche, quelle est la probabilité que la première ait été blanche ?

17 SF 10 On reprend les notations de l'exercice 16. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la probabilité de B_k est égale à $\dfrac{b}{n+b}$.

18 SF 13 Le quart d'une population a été vacciné. Parmi les vaccinés, la proportion de malades est 1/12. Parmi les malades, il y a quatre non-vaccinés pour un vacciné. Quelle est la probabilité pour un non-vacciné de tomber malade ?

19 *SF 10* On sait qu'une maladie existe dans une population et on a mis au point un test pour la détecter. On sait que le test est positif une fois sur quatre dans la population, qu'il l'est huit fois sur dix chez les malades et une fois sur dix chez les personnes saines. Calculer la probabilité p qu'un individu pris au hasard soit malade.

20 *SF 9* *SF 13* *Ex. 105, banque INP* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de 100 dés dont 25 pipés. Chaque dé pipé donne 6 avec probabilité $\frac{1}{2}$. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois 6.

a) Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?

b) Déterminer : $\lim_{n\to+\infty} p_n$. Interprétation ?

Suites de probabilités

21 *SF 12* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance n fois un dé équilibré à six faces et on note p_n la probabilité que la somme des numéros obtenus sur ces n lancers soit paire. Montrer que $p_n = \frac{1}{2}$.

22 *SF 12* Un message doit être transmis d'un point à un autre à travers n canaux successifs. Ce message peut prendre deux valeurs 0 ou 1, et a une probabilité $a \in]0,1[$ d'être bruité, *i.e.* transformé en son contraire, durant le passage par un canal. On note p_n la probabilité qu'après les n passages, le message soit le même que celui initialement transmis. Déterminer une expression de p_n en fonction de n et étudier $\lim_{n\to+\infty} p_n$.

23 *SF 10* *SF 12* Soit $n \geq 1$. On dispose de deux pièces : la pièce 1 est équilibrée et la pièce 2 donne pile avec probabilité $p \in]0,1[$. On effectue une suite de n lancers comme suit : on lance d'abord une des deux pièces choisie au hasard. Si on obtient pile, on relance la même pièce ; si on obtient face, on change de pièce. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on note u_k la probabilité que le k^e lancer s'effectue avec la pièce 1

1. Pour tout $k \in [\![1,n-1]\!]$, exprimer u_{k+1} en fonction de u_k.

2. Exprimer u_n en fonction de n, p et $\omega = \dfrac{2(1-p)}{3-2p}$.

3. On note r_n la probabilité d'obtenir pile au n^e lancer. Etudier $\lim_{n\to+\infty} r_n$ en fonction de p.

24 *SF 10* Soit $n \geq 2$. On lance n fois une pièce équilibrée. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on note P_k l'événement « obtenir pile au k^e lancer », F_k l'événement « obtenir face au k^e lancer » et u_k la probabilité qu'au cours de k lancers consécutifs, on n'ait jamais obtenu deux piles successifs.

1. Calculer u_1 et u_2 .

2. a) En utilisant le système complet d'événements $(F_1, P_1\cap P_2, P_1\cap F_2)$, exprimer u_{k+2} en fonction de u_{k+1} et u_k pour tout $k \in [\![1,n-2]\!]$.

b) Prouver que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0.

25 *SF 12* *Ex. 101, banque INP* Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A,B et C. A l'instant $t=0$, il se trouve au point A. Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note a_n (respectivement b_n, c_n) la probabilité que l'animal soit en A (respectivement en B, en C) après son $n^{\text{ième}}$ trajet et on pose : $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1. Trouver $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $U_{n+1} = MU_n$ pour tout $n \geq 0$

2. Expliquer comment ces résultats pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n. *On ne demande pas le calcul effectif.*

26 *SF 10* Un joueur joue à un jeu d'argent contre le casino lors d'une succession de parties indépendantes. On suppose qu'initialement la fortune du joueur est de $k \in \mathbb{N}$ et celle du casino de $N-k$ avec $0 \leq k \leq N$ et $N \in \mathbb{N}^*$. A chaque partie, le joueur gagne 1 euro avec probabilité p et en perd un avec probabilité $q = 1-p$. On suppose que $0 < p < 1$ et que $p \neq 1/2$. Le jeu s'arrête dès que le joueur est ruiné ou dès qu'il a en sa possession la somme de N euros. On note p_k la probabilité que le joueur finisse ruiné s'il commence avec k euros.

1. a) Calculer p_0 et p_N.

b) Montrer que pour $k \in [\![1,N-1]\!]$: $p_k = pp_{k+1} + qp_{k-1}$.

2. En déduire une expression de p_k en fonction de k, N et $r = \dfrac{q}{p}$ puis étudier $\lim_{N\to+\infty} p_k$.

27 *SF 8* *SF 9* On lance une pièce donnant pile avec probabilité p. On suppose que cette expérience peut être réalisée autant de fois que nécessaire et que les résultats successifs sont mutuellement indépendants. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note u_n la probabilité qu'au cours de n lancers consécutifs, on ait obtenu deux piles consécutifs pour la première fois à l'issue du n^e lancer.
Montrer que $u_{n+3} = p^2(1-p)\left(1 - \sum_{k=1}^{n} u_k\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

28 *SF 10* Soit $n \geq 2$. On suppose que n passagers montent successivement dans un avion de n places. Le premier prend une place au hasard. Ensuite, pour chaque $k \in [\![1,n]\!]$, le passager k s'assoie à la place k si elle est libre et choisit une place au hasard si la place k est occupée. On note p_k la probabilité que le k^e passager s'asseye à la place k.

1. Montrer que : $p_n = \dfrac{1}{n}\left(1 + \sum_{k=2}^{n-1} p_{n-k+1}\right)$.

2. En déduire que la valeur de p_n.

3. Si le premier passager s'est assis sur une autre place que la place 1, quelle est la probabilité que le n^e passager s'asseye à la place n ?

29 *SF 5* *SF 7* *SF 8* Pour tout $n \geq 1$, on note p_n la probabilité qu'une relation binaire $\mathscr{R}$ formée au hasard sur $[\![1,n]\!]$ soit une relation d'équivalence. On pose $p_0 = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer p_{n+1} en fonction de $p_0, \ldots, p_n$.

30 *SF 7* *SF 8* Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On choisit au hasard $k \in [\![0,3m]\!]$ puis on pose : $u_0 = \sin^2\left(\dfrac{k\pi}{3m}\right)$ et $u_{n+1} = 4u_n(1-u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge avec probabilité : $\dfrac{3\times 2^{v_2(m)}+1}{3m+1}$. *Indication : Commencer par montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si elle est stationnaire.*

31 *SF 9* Soit $(G,\star)$ un groupe fini de cardinal n et d'élément neutre e. On forme une partie aléatoire A de G où l'on place chaque élément de G indépendamment avec probabilité $p > 0$. On pose $AA = \{a \star b \ a, b \in A\}$ et on note p_n la probabilité que AA possède e. Montrer que $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.