1

1. $\Omega = [\![1\,,6]\!]^4$

2. Ω est muni de la probabilité uniforme donc ici pour tout événement A : $\quad P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{|A|}{6^4}$

a) *Réponse :* $\frac{1}{6^3}$.

b) Si B est l'événement « Obtenir au moins deux fois le même numéro » calculer $P(\overline{B})$ puis $P(B) = 1 - P(\overline{B})$.
Réponse $P(B) = \frac{13}{18}$.

c) Noter C l'événement : « Obtenir exactement deux 6 ». Réaliser C revient à :

- Fixer les numéros des deux lancers donnant 6
- Puis obtenir un nombre autre que 6 sur chacun des deux autres lancers.

Réponse $P(C) = \frac{5^2}{6^3}$.

d) Effectuer une telle suite revient à choisir un sous-ensemble de $[\![1\,,6]\!]$ formé de 4 éléments.
Réponse $\frac{5}{2\times 6^3}$

2 Choisir comme univers $\Omega = [\![1\,,365]\!]^{25}$ (listes de 26 nombres de $[\![1\,,365]\!]$).
Notant A : « Au moins deux tirages donnent le même numéros », remarquer que $\overline{A}$ est l'événement « Tous les numéros tirés sont distincts » et dénombrer $\overline{A}$.
Réponse : $P(A) = 1 - \dfrac{(365)!}{(339)! \times 365^{26}}$.

3 Notons A l'événement : « Obtenir 3 boules blanches ».
Réponse. $P(A) = \frac{1}{30}$.

1. Ω est l'ensemble des 3-arrangements de l'ensemble des 10 boules de l'urne, muni de la probabilité uniforme.
Utiliser le dénombrement (réaliser A revient à tirer successivement sans remise 3 boule dans une urne où l'on a placé seulement les quatre boules blanches).

2. Introduire des événements élementaires : B_i : « le i^{e} tirage donne une boule blanche ».
Alors $A = B_1 \cap B_2 \cap B_3$ et on peut utiliser la formule des probabilités composées.

4 Choisir comme univers Ω l'ensemble des combinaisons de 5 cartes choisies parmi 52, muni de la probabilité uniforme.
Si A est l'événement : « l'as de trèfle est tiré » alors $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.
Réponse : $P(A) = \frac{5}{32}$

5 Choisir comme univers Ω l'ensemble des combinaisons de 4 chaussures choisies parmi 20, muni de la probabilité uniforme.

a) Si A est l'événement : « obtenir deux paires » : $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.
Pour dénombrer A « ranger » les chaussures par paires dans 10 boîtes : réaliser A revient à choisir 2 boîtes.
Réponse : $P(A) = \frac{3}{17\times 19}$

b) Si B est l'événement : « obtenir au moins une paire » alors $\overline{B}$: « Obtenir 4 chaussures différentes ».
Il reste à dénombrer $\overline{B}$. Pour cela « ranger » les chaussures par paires dans 10 boîtes : réaliser $\overline{B}$ revient à choisir 4 boîtes puis, pour chaque boîte, à choisir une des deux chaussure de la boîte.

c) C'est la probabilité de $B \setminus A$.

6 Pour dénombrer, s'imaginer que les cartes sont classées par paires et retournées devant soi.

- *Réponse si on choisit deux cartes :* $\frac{1}{2n-1}$
- *Réponse si on choisit trois cartes :* $\frac{3}{2n-1}$

7 Noter A l'événement « Obtenir trois cartes de la même couleur » et B « Obtenir trois cartes de couleurs différentes »

1. Choisir comme univers Ω l'ensemble des combinaisons (simultané) de 3 cartes choisies parmi 32, muni de la probabilité uniforme : $|\Omega| = \binom{32}{3}$.

a) $|A| = \binom{4}{1} \times \binom{3}{8}$ (On choisit une des 4 couleur puis trois des huit cartes de cette couleur)

b) $|B| = \binom{3}{4} \times 8^3$ (On choisit 3 des 4 couleur puis, pour chaque couleur choisie une des huit cartes de cette couleur)

2. Choisir comme univers Ω l'ensemble des 3-arrangements de l'ensemble des 32 cartes, muni de la probabilité uniforme : $|\Omega| = 32 \times 31 \times 30$.

a) Procéder par étapes successives : $|A| = 32\times 7\times 6$ (choix d'une première carte quelconque, puis choix d'une seconde de la couleur de la première, puis d'une troisième encore de la même couleur)

b) $|B| = 32 \times 24 \times 16$ (choix d'une première carte quelconque, puis on enlève toutes les cartes de cette couleur et on choisit une carte parmi celle qui reste, puis on refait le même procédé pour la troisième)

3. Choisir comme univers Ω l'ensemble des 3-listes de l'ensemble des 32 cartes, muni de la probabilité uniforme : $|\Omega| = 32^3$.

a) Procéder par étapes successives : $|A| = 32\times 8\times 8$ (choix d'une première carte quelconque, puis choix d'une seconde de la couleur de la première, puis d'une troisième encore de la même couleur)

b) $|B| = 32 \times 24 \times 16$ (choix d'une première carte quelconque, puis on enlève toutes les cartes de cette couleur et on choisit une carte parmi celle qui reste, puis on refait le même procédé pour la troisième)

8 Définir des événements élémentaires :

- G_i : « La i^{e} personne qui descend du bus est un garçon »
- F_i : « La i^{e} personne qui descend du bus est un garçon »

On cherche : $\quad P(G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap F_4)$, calculable via la formule des probabilités composées.

9

1. • Donner un nom à l'événement auquel on s'intéresse *i.e.*
A : « avoir un changement de couleur à chaque tirage ».

- Définir des événements élémentaires :
  - R_i : « La i^{e} boule tirée est rouge »
  - V_i : « La i^{e} boule tirée est verte »
- Exprimer A en fonction de ces événements :

$$A = \underbrace{\left(R_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap R_{2n-1} \cap V_{2n}\right)}_{A_R} \cup \underbrace{\left(V_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap V_{2n-1} \cap R_{2n}\right)}_{A_V}$$

- A_R et A_V sont incompatibles et la probabilité de A_V ou A_R se calcule par la formule des probabilités composées.

Réponse : $p_n = 2 \times \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$

2. Formule de Stirling : $\quad n! \sim \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}$.

10 Définir des événements élémentaires, par exemple :

- A_n : « La boule 1 est dans les $n-1$ boules choisies dans U_n »
- ...
- A_{n-k} : « La boule 1 fait partie des $n-k-1$ boules choisies dans U_{n-k} »
- ...
- A_2 : « La boule 1 est la boule choisie dans U_2 »

On cherche alors : $P(A_n \cap A_{n-1} \cap \cdots \cap A_2)$
Utiliser la formule des probabilités composées.
Toutes simplifications faites : $P(A_n \cap A_{n-1} \cap \cdots \cap A_2) = \frac{1}{n}$

11
- Donner un nom à l'événement auquel on s'intéresse *i.e.* A est l'événement : obtenir au plus un pile sur les n tirages.
- Définir des événements élémentaires :
  - P_i : « Le i^e lancer donne pile »
  - F_i : « Le i^e lancer donne face »
- Exprimer A en fonction de ces événements à l'aide de réunion et d'intersections

  Réponse : $P(A) = \dfrac{n+1}{2^n}$

12
- Commencer par donner un nom à l'événement auquel on s'intéresse *i.e.* $p_{n,N} = P(A)$ où A est l'événement : obtenir exactement une boule blanche.
- Définir des événements élémentaires :
  - B_i : « Le i^e tirage donne une boule blanche »
  - R_i : « Le i^e tirage donne une boule rouge »
- Exprimer A en fonction de ces événements :

$$A = \underbrace{\left(B_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_N\right)}_{A_1} \cup \underbrace{\left(R_1 \cap B_2 \cap R_3 \cap \cdots \cap R_N\right)}_{A_2} \cup \ldots \cup \underbrace{\left(R_1 \cap \cdots \cap R_{n-1} \cap B_N\right)}_{A_N}$$

- A est une réunion d'événements incompatibles et la probabilité de des A_i s'obtient par la formule des probabilités composées

  Réponse : on trouve d'abord, après simplifications
$$P(A_i) = \left(\frac{1}{2}\right)^i \times \left(\frac{n}{2n-1}\right)^{N-i} = \left(\frac{n}{2n-1}\right)^N \times \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^i$$
puis après le calcul de la somme géométrique qui apparaît :
$$P(A) = \frac{n}{\left(2-\frac{1}{n}\right)^{N-1}} \times \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)$$

13 Construire φ c'est choisir les d images, $\varphi(\omega, 0, \ldots, 0)$, ..., $\varphi(0, \ldots, 0, \omega)$ dans $\mathbb{U}_n$.

14
- Donner des noms aux événements pertinents par exemple :
  - T : « Le dé est pipé »
  - A : « Le dé donne six »
- On cherche alors $P_A(T)$ et l'énoncé donne $P(T)$ et $P_T(A)$.
- Utiliser Bayes : *réponse :* $\frac{1}{2}$

15 Il suffit de formaliser la situation :
- Donner des noms aux événements pertinents par exemple :
  - A : « La barquette contrôlée provient du producteur A »
  - B : « La barquette contrôlée provient du producteur B »
  - C : « La barquette contrôlée provient du producteur C »
  - E : « La barquette contrôlée est faîte à partir de cheval »
- On cherche alors $P_E(A)$.
- Utiliser Bayes. *Réponse :* $\frac{2}{9}$

16 **a)** Utiliser la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(B_1, \overline{B_1})$.

b) On cherche $P_{B_2}(B_1)$. Utiliser la formule de Bayes.
Réponse : $\frac{b+d}{b+n+d}$

17 Procéder par récurrence. Précisément l'hypothèse de récurrence pour $k \in \mathbb{N}^*$ est : « Pour tous $b, n \in \mathbb{N}^*$ et toute urne de b boules blanches et n boules noires, la probabilité d'obtenir une boule blanche au k^e tirage vaut $\frac{b}{b+n}$. »
Pour l'hérédité, appliquer la formule des probabilités totales avec le le système complet d'événements $(B_1, \overline{B}_1)$: sachant B_1 (par exemple) réaliser B_{k+1} revient alors à obtenir une boule blanche après k tirage dans une urne contenant $b+d$ boules blanches et n noires.

18
- Donner des noms aux événements :
  - M : « La personne est malade »
  - V : « La personne est vaccinée »
- On cherche $P_{\overline{V}}(M)$.
- Avec Bayes il suffit donc de connaître $P_M(\overline{V})$, $P(M)$ et $P(V)$
- L'énoncé donne $P_M(\overline{V})$ et $P(V)$.
- Il reste donc $P(M)$ à déterminer mais l'énoncé donne aussi $P_V(M)$ ce qui, par la formule de Bayes (et connaissant $P_M(V)$ et $P(V)$), permet d'acceder à $P(M)$.

  Réponse : $P_{\overline{V}}(M) = \dfrac{1}{9}$

19 Donner des noms aux événements :
- R : « La personne réagit au test »
- V : « La personne est malade »

On cherche $p = P(M)$. Appliquer la formule des probabilités totales avec le le système complet d'événements $(M, \overline{M})$ pour exprimer $P(R)$ en fonction de p.

Réponse : $p = \dfrac{3}{14}$

20
- Définir des événements élémentaires :
  - T : « Le dé choisi est truqué »
  - A_i : « Le i^e lancer donne un six »
- On cherche $p_n = P_{A_1 \cap \cdots \cap A_n}(T)$.
- Avec la formule de Bayes il suffit de calculer $P_T(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$ et $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$:
  - Pour calculer $P_T(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$, constater que pour la probabilité P_T (*i.e.* sachant que l'on lance un dé truqué), les A_i sont indépendants.
  - Pour calculer $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$, utiliser la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(T, \overline{T})$.

Réponse : $p_n = \dfrac{1}{1 + (\frac{1}{3})^{n-1}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$

21 Donner un nom aux événements : A_n est « la somme des numéros obtenus sur les n lancers est paire »
Procéder par récurrence, pour l'hérédité appliquer la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(A_n, \overline{A_n})$.

22
- Donner un nom aux événements : A_k est « après k passages, le message est le même que le message initial ».
- Exprimer p_{k+1} en fonction de p_k pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ en appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(A_k, \overline{A_k})$.
  Réponse : $p_{k+1} = (1-2a)p_k + a$.
- La suite (p_k) est arithmético-géométrique :
  Réponse : $p_n = (1-2a)^{n-1}(p_1 - \alpha) + \alpha \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$ où $\alpha = \frac{1}{2}$.

23
1. Nommer U_k l'événement « le k^e lancer s'effectue avec la pièce 1 » et appliquer la formule des proba totales avec le système complet d'événements $(U_k, \overline{U_k})$.
   Réponse : $u_{k+1} = \left(p - \dfrac{1}{2}\right)u_k + 1 - p$
2. La suite (u_k) est arithmético-géométrique : $u_n = \left(p - \dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\dfrac{1}{2} - \omega\right) + \omega$
3. Ne pas oublier de nommer l'événement : P_n le n^e lancer donne pile et donc $r_n = P(P_n)$.
   Appliquer la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(U_n, \overline{U}_n)$.
   Réponse : $r_n = \dfrac{1}{2}u_n + p \times (1 - u_n)$
   $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \omega$ donc $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}\omega + p\times(1-\omega) = \dfrac{1}{3-2p}$

24 Donner un nom aux événements : A_k est « Au cours de k lancers consécutifs, deux piles consécutifs n'ont jamais été obtenus »
1. $A_1 = \Omega$ donc $u_1 = 0$, $\overline{A}_2 = F_1 \cap F_2$
   (F_i est l'événement : faire face au i^e).
2. a) Appliquer la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(F_1, P_1 \cap P_2, P_1 \cap F_2)$ pour calculer $P(A_{k+2})$ et constater que
   $P_{F_1}(A_{k+2}) = u_{k+1}$ et $P_{P_1\cap F_2}(A_{k+2}) = u_{k+1}$.
   Réponse : $u_{k+2} = \dfrac{1}{2}u_{k+1} + \dfrac{1}{4}u_k$
   b) (u_k) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
   L'équation caractéristique a pour racines : $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ donc : $u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$ pour certains $A, B \in \mathbb{R}$.
   Vu que $\lambda_1, \lambda_2 \in]-1, 1[$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

25 Ne pas oublier de donner un nom aux événements dont on étudie la probabilité A_n (resp. B_n, C_n) : « l'animal est en A (resp. B, C) après son $n^{\text{ième}}$ trajet »
1. Appliquer (trois fois) la formule des probabilités totales au système complet d'événements (A_n, B_n, C_n) pour exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
   Réponse :
   - $a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n$
   - $b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n$
   - $c_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n$

   d'où l'on déduit M.
2. Il suffit de calculer M^n pour obtenir a_n, b_n et c_n.

26 Donner un nom aux événements : R_k est « le joueur finit ruiné en commençant avec k euros »
1. a) $p_0 = 1$ et $p_N = 0$
   b) Conditionner en fonction du résultat de la première partie. Précisément notant G l'événement « le joueur gagne la première partie » on obtient la relation demandée en appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(G, \overline{G})$.
2. (p_k) est une suite récurrente linéaire d'ordre deux.
   Les racines de l'équation caractéristiques sont 1 et $r = \frac{q}{p}$, avec les conditions $p_0 = 1$ et $p_N = 0$ on trouve :
   $$\forall k \in [\![0, N]\!], \quad p_k = \frac{r^k - r^N}{1 - r^N}$$
   La limite dépend du comportement de r^N :
   - Si $r < 1$ (*i.e.* $p > \frac{1}{2}$), alors $r^N \to 0$ et $p_k \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} r^k$ (r^k est le probabilité d'être ruiné si on joue contre un casino riche, proba d'autant plus petite que la fortune initiale k est grande)
   - Si $r > 1$ (*i.e.* $p < \frac{1}{2}$) alors $r^N \to +\infty$ et $p_k \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ (dans cette situation, si le casino a suffisamment d'argent le joueur fini toujours ruiné, peu importe sa fortune initiale)

27 Notant A_n l'événement « Au cours de n lancers consécutifs, deux piles consécutifs ont été obtenus pour la première fois à l'issue du n^e lancer », la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ est la probabilité de la réunion incompatible $B_n = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k$: c'est l'événément « Deux piles consécutifs ont été obtenus au cours des n premiers lancers ». Remarquer que $A_{n+3} = \overline{B}_n \cap \overline{P}_{n+1} \cap P_{n+2} \cap P_{n+3}$ où P_n est l'événement : « le n ieme lancer donne pile »

28 Donner un nom aux événements dont on étudie la probabilité : G_n est « le n^e passager s'assoie à la place n »
1. Conditionner en fonction de la place choisie par le premier passager *i.e.* appliquer la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ où A_k est l'événement « Le premier passager s'assoie à la place k ». Constater que $P_{A_k}(G_n) = p_{n-k+1}$ (sachant A_k, les passagers 2 à $k-1$ s'assoient à leur place et le passager k choisit une place au hasard : on est ramené à la situation initiale avec $n-k+1$ passagers).
2. Dans l'expression $p_{n+1} = \left(1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} p_{n-k+2}\right)$, sortir le terme d'indice $k = 2$ de la somme puis réindexer la somme restante pour refaire apparaître l'expression de p_n obtenue à la première question.
   On aboutit à $p_{n+1} = p_n$ puis $p_2 = \dfrac{1}{2}$ donne la valeur de la constante.
3. On cherche $P_{\overline{A}_1}(G_n)$. Exprimer p_n en fonction de cette probabilité à l'aide de la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(A_1, \overline{A}_1)$.
   Réponse : $P_{\overline{A}_1}(G_n) = \dfrac{n-2}{2(n-1)}$.

29 Ici P désigne la probabilité uniforme sur $\mathscr{P}([\![1, n+1]\!]^2)$ donc : $p_{n+1} = P(A) = \dfrac{|A|}{2^{(n+1)^2}}$
où A est l'événement : « La relation choisie est une rela-

tion d'équivalence ». Décomposer A en fonction du nombre d'éléments dans la classe d'équivalence d'un élément fixé, par exemple $n+1$: $A = \bigcup_{k=1}^{n+1} A_k$

où A_k est l'événement : « La relation choisie est une relation d'équivalence pour laquelle il y a k éléments en relation avec $n+1$ ».

Remarquer que choisir une relation de A_k c'est :

- choisir les $k-1$ éléments de $[\![1\,,n]\!]$ de $\mathrm{cl}(n+1)$ (autres que $n+1$)
- puis définir une relation d'équivalence sur l'ensemble $E = [\![1\,,n+1]\!] \setminus \mathrm{cl}(n+1)$.

Puisque $|E| = (n+1-k)$: $\quad |A_k| = \binom{n}{k-1} r_{n+1-k}$

où r_{n+1-k} est le nombre de relations d'équivalences sur E :

$$r_{n+1-k} = p_{n+1-k} \times 2^{(n+1-k)^2}$$

Finalement : $\quad p_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} 2^{k(k-2n-2)} \binom{n}{k-1} p_{n+1-k}$

30

31