Dénombrements divers

1 SF 1 SF 3 Une urne contient neuf boules : deux vertes numérotées de 1 à 2, trois blanches numérotées de 1 à 3 et quatre rouges numérotées de 1 à 4. On tire successivement et sans remise quatre boules (quatre tirages d'une boule).

1. Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y-a-t-il de tirages donnant :
   a) Au moins une boule verte ?
   b) Uniquement des boules d'une même couleur ?

2 SF 1 SF 2 On effectue cinq tirages d'une boule, successivement et avec remise, dans une urne contenant neuf boules numérotées de 1 à 9

1. Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
2. a) Quel est le nombre de tirages tels que la deuxième boule tirée soit la boule 4 ?
   b) Quel est le nombre de tirages tels que la boule 4 ait été tirée une deuxième fois en position trois ?
3. Dénombrer l'ensemble des tirages contenant :
   a) (Exactement) deux fois la boule numérotée 2.
   b) Au moins une fois la boule 9.
   c) Trois fois la boule 3 (exactement) et une seule fois la 1

3 SF 1 SF 4 Un joueur de poker reçoit une « main » de cinq cartes choisies simultanément dans un jeu de 32.

1. Combien y a-t-il :
   a) De mains possibles ?
   b) De mains contenant exactement un As ?
   c) De mains contenant au moins un As ?
2. Combien y a-t-il :
   a) De carrés possibles ? b) De fulls possibles ?
   c) De brelans possibles (fulls exclus) ?
   d) De double paires (brelans et carrés exclus) ?

N.B. dans un jeu de 32 cartes, il y a huit « hauteurs » qui sont 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As, de quatre « couleurs » qui sont Pique, Cœur, Carreau et Trèfle.

- *Un carré = quatre cartes de même hauteur*
- *Une paire = deux cartes de même hauteur (et pas trois)*
- *Un brelan = trois cartes de même hauteur (et pas quatre)*
- *Un full = un brelan et une paire*

4 SF 1 SF 3 SF 4 Dans une classe de 45 élèves, déterminer le nombre de façons de former des trinômes :

a) Lorsque les groupes sont numérotés.
b) Lorsque les groupes ne sont pas numérotés.

5 SF 1 SF 3 SF 4 A l'issue d'un concours, 160 candidats sont admis, dont 70 garçons. Déterminer le nombre de classements possibles des 10 premiers admis qui contiennent autant de filles que de garçons.

6 SF 1 SF 3 SF 4 Dans une bibliothèque, 20 livres sont exposés sur une étagère rectiligne et répartis au hasard.
Parmi ces vingt livres, quatre sont du même auteur A, les autres étant d'auteurs tous différents.
Déterminer le nombre de façon de ranger ces vingts livres pour que les quatre livres de A se retrouvent côte à côte.

7 SF 1 SF 3 Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n. Combien existe-t-il de relation d'ordre total sur E ?

8 Montrer que si l'on décide de redessiner les frontières (terrestres) alors il existera toujours au moins deux pays ayant le même nombre de voisins.

9 Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $n > p^2$ et soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'au moins l'une des deux affirmations suivante est vraie :

- au moins $p+1$ des nombres $x_1, \dots, x_n$ sont égaux ;
- au moins $p+1$ des nombres $x_1, \dots, x_n$ sont deux à deux distincts.

10 SF 1 Une partie A de $\mathbb{N}$ est dite *sans somme* si $x+y \neq z$ pour tous $x, y, z \in A$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le cardinal maximal d'une partie sans somme de $[\![1, n]\!]$.

Disjonction de cas et récurrence

11 SF 1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note a_n le nombre de façons de recouvrir un damier de $2n$ cases à 2 lignes et n colonnes avec des dominos de dimension 1×2.

1. Calculer a_1 et a_2 puis montrer que : $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. ★★★ Calculer a_n en fonction de n puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_n = \left\lfloor \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right\rfloor$$

12 SF 1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note R_n le nombre de rectangles inclus dans le triangle de sommets $(0,0)$, $(0,n)$ et $(n,0)$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$:

$$R_{n+1} = R_n + \frac{(n+2)(n+1)n}{6}$$

2. En déduire R_n en fonction de n pour tout $n \geq 1$.

Composition d'un entier

13 SF 1 SF 4 Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$ on note K_n^p le nombre de n-listes $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ telles que : $x_1 + \dots + x_n = p$.

1. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$:

$$K_n^p = \binom{n+p-1}{p}$$

2. a) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$:

$$K_{n+1}^p = \sum_{\ell=0}^{p} K_n^\ell.$$

   b) Retrouver le résultat de 1..

14 SF 1 SF 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$.

1. Combien existe-t-il de familles $(y_1, \dots, y_n)$ d'entiers pour lesquelles : $1 \leq y_1 < \dots < y_n \leq p$.
2. En déduire le nombre de familles $(x_1, \dots, x_n)$ d'entiers telles que : $x_1 + \dots + x_n \leq p$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire le nombre de familles $(x_1, \dots, x_n)$ d'entiers telles que : $x_1 + \dots + x_n = p$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}^*$.

Dénombrement de parties

15 SF 1 SF 4 SF 5 Soit E un ensemble fini de cardinal m et F un ensemble fini disjoint de E et de cardinal n.

1. Soit $k \in [\![0,p]\!]$. Combien y-a-t-il de parties à p éléments de $E \cup F$ possédant exactement k éléments de E ?
2. En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{m}{k}\binom{n}{p-k} = \binom{n+m}{p}$

16 SF 1 SF 4 SF 5 Soient E un ensemble fini de cardinal n et $p \in [\![0,n]\!]$. On pose :

$$F = \left\{(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2 \mid A \cap B = \varnothing \quad \text{et} \quad |A \cup B| = p\right\}.$$

En dénombrant F de deux façons différentes montrer que :

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}$$

17 SF 1 SF 4 SF 5 Soit E un ensemble fini de cardinal n. Déterminer le nombre de couples (A,B) de parties de E pour lesquels : $A \cup B = E$

18 SF 1 Soit E un ensemble fini de cardinal n. Trouver le nombre de couples $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que : $A \not\subset B$ et $B \not\subset A$.

19 SF 1 SF 5 Soit E un ensemble fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}^*$. Trouver le nombre de familles $(A_1,\dots,A_p)$ de parties de E telles que $A_1 \subset \cdots \subset A_p$.

20 SF 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:
$$\sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$$
2. On note $\mathscr{P}_n$ l'ensemble des parties non vides de $[\![1,n]\!]$. Calculer : $\displaystyle M_n = \sum_{A \in \mathscr{P}_n} \max A$ et $\displaystyle m_n = \sum_{A \in \mathscr{P}_n} \min A$.

21 SF 1 SF 6 Soit E un ensemble fini de cardinal n.

Calculer : $\displaystyle\sum_{A,B \in \mathscr{P}(E)} |A \cap B|$

22 SF 1 SF 4 SF 5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{S}$ un sous-ensemble de $\mathscr{P}([\![1,n]\!])$ tel que pour toutes parties $A, B \in \mathscr{S}$ distinctes, A et B ne sont pas comparables *i.e.* : $A \not\subset B$ et $B \not\subset A$.

1. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on note L_k le nombre d'éléments de $\mathscr{S}$ de cardinal k. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k!(n-k)!L_k \leq n!$.
2. En déduire : $|\mathscr{S}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Dénombrement d'applications

23 SF 1 SF 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Combien existe-t-il d'applications de $[\![1,3n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ dont tout élément de l'image possède exactement 3 antécédents ?

24 SF 1 SF 4 SF 5 Soit E un ensemble fini de cardinal n. On note $\mathscr{F}$ l'ensemble des applications $f : E \longrightarrow E$ telles que $f \circ f = f$. Montrer que : $\displaystyle|\mathscr{F}| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^{n-k}$

25 SF 1 Combien existe-t-il d'applications :

1. Strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$?
2. Croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$? *Indication : Montrer que $f : [\![1,p]\!] \to [\![1,n]\!]$ est croissante ssi $g : k \mapsto f(k) + k - 1$ est strictement croissante de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n+p-1]\!]$.*

26 SF 1

1. Soit $n \geq 2$.
   Combien existe-t-il de surjections de $[\![1,n]\!]$ sur $\{1,2\}$?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Combien existe-t-il de surjections de $[\![1,n+1]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$?

27 SF 1 Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n.
Combien existe-t-il :

1. De lois de composition interne sur E ?
2. De lois de composition interne sur E possédant un élément neutre ?
3. De lois de composition interne commutatives sur E ?