1 **1.** Il s'agit de tirages *successifs et sans remise* de 4 boules donc un tirage est un *arrangement* de 4 des neuf boules de l'urne.
Réponse : $9\times 8\times 7\times 6$

2. a) Noter A l'ensemble des tirages donnant une boule verte et dénombrer $\overline{A}$: *Réponse :* $9\times8\times7\times6-7\times6\times5\times4$

b) Vu la composition de l'urne, un tirage donnant quatre boules de la même couleur est un tirage donnant quatre boules rouges.

2 **1.** Il s'agit de tirages *successifs et avec remise* de 5 boules donc un tirage est une *5-liste* des neuf boules de l'urne.
Réponse : 9^5

2. a) *Réponse :* $9\times 1\times 9\times 9\times 9$

b) Il y deux types de tirages possibles :

- Ceux donnant la boule 4 en position 1 et en position 3 (et autre boule que la 4 en position 2)
- Ceux donnant la boule 4 en position 2 et en position 3 (et autre boule que la 4 en position 1)

3. a) Par étapes successives, effectuer un tel tirage c'est :

- Choisir l'ensemble des deux positions auxquelles sont obtenues la boule 2 (parmi les 5 positions)
- Puis une fois ces deux tirages fixés, obtenir une autre boule que 2 sur chacun des 3 autres tirages.

b) Noter A l'ensemble des tirages donnant au moins une fois la boule 9 et dénombrer $\overline{A}$. *Réponse :* 9^5-8^5.

c) Par étapes successives, effectuer un tel tirage c'est :

- Choisir l'ensemble des trois positions auxquelles sont obtenues la boule 3 (parmi les 5 positions)
- Puis une fois ces trois tirages fixés, choisir la position à laquelle est obtenue la boule 1 (parmi les 2 positions restantes)
- Puis une fois ces 4 tirages fixés, obtenir une autre boule que 3 et 1 le tirage restant.

3 Il faut penser « comme un tricheur » : les cartes ne sont pas cachées mais retournées devant soi et on essaie de lister toutes les possibilités pour former la main demandée.

1. a) Un tirage est une combinaison (partie) de 5 cartes choisies parmi 32.

b) On met les 4 as à part : on a donc les quatre as retournés face à nous d'un côté de la table et les 28 autres cartes retournées d'un autre côté de la table. Former une telle main revient à

- Choisir un des 4 as
- Puis on choisit 4 cartes parmi les 28 autres cartes

c) Compter le nombre de mains ne contentant aucun as

2. Disposer les cartes par couleur sur 4 colonnes :

Les Coeur	Les Carreau	Les Pique	Les Trèfle
7	7	7	7
8	8	8	8
9	9	9	9
V	V	V	V
D	D	D	D
R	R	R	R
As	As	As	As

a) Former une telle main revient à :

- Choisir la hauteur des quatre cartes identiques (*i.e.* choisir une des « lignes » : les 7 ou les 8 ou les 9 ... ou les As)
- Puis une fois cette hauteur choisie et les quatre cartes en question de côté, on choisit une carte parmi les 28 autres

b) *Réponse :* $\binom{8}{1}\times\binom{4}{3}\times\binom{7}{1}\times\binom{4}{2}$

c) Compter le nombre de mains donnant 3 cartes identiques (fulls inclus) et retrancher le nombre de fulls.

4 **a)** Procéder par étapes successives : nombre de possibilités pour former le trinôme 1 (= choisir 3 élèves parmi les 45), puis nombre de possibilités pour former le trinôme 2, ...
Réponse : $\dfrac{45!}{6^{15}}$.

b) Noter x le nombre de possibilités de former 15 groupes sans numéros et procéder par double comptage pour compter le nombre de façons de former des trinôme numérotés :

- *Première façon :* $\dfrac{45!}{6^{15}}$ possibilités.
- *Deuxième façon :* Former 15 trinômes numéroté c'est aussi former 15 groupes non numérotés (x possibilités) puis numéroter chacun de ces 15 groupes.

5 *Réponse* $\binom{70}{5}\times\binom{90}{5}\times 10!$.

6 Imaginer que les places sont numérotés sur l'étagère de 1 à 20 et qu'il s'agit de mettre un livre sur chaque place.
Effectuer un tel rangement revient à :

- Choisir la position du bloc des 4 livres de l'auteur A
- Puis disposer les 4 livres de A sur ces quatre places.
- Enfin ranger les 16 autres livres

7 Former une telle relation d'ordre revient à ordonner les n éléments de E (*i.e.* les « ranger »).

8 Supposer par l'absurde qu'il existe un moyen de redessiner les frontières pour lequel aucun pays n'a le même nombre de voisin. En notant E l'ensemble des pays ainsi formés et n le cardinal de E, l'application f qui à un pays de E associe sont nombre de voisin est alors par hypothèse une application injective de E dans $[\![0,n-1]\!]$. Puisque E et $[\![0,n-1]\!]$ sont de même cardinal, f est aussi surjective. En déduire une contradiction en considérant un antécédent p de 0 par f (« une île ») et un antécédent q de $n-1$ par f (un pays dont tous les autres pays sont voisins).

9 Noter $\{a_1,\dots,a_r\}$ l'ensemble des valeurs distinctes de $x_1,\dots,x_n$ et $A_k=\{i\in[\![1,n]\!]\mid x_i=a_k\}$ pour tout $k\in[\![1,r]\!]$. Il s'agit de montrer qu'au moins l'une des deux affirmations suivante est vraie :

- $|A_k|>p$ pour au moins un $k\in[\![1,r]\!]$;
- $r>p$

Supposer par exemple que $|A_k|\leq p$ pour tout $k\in[\![1,r]\!]$ et montrer qu'alors $r>p$ en exploitant la réunion disjointe :

$$[\![1,n]\!]=\bigcup_{k=1}^{r}A_k$$

10 *Réponse :* $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.
Si A est sans somme, considérer la partie B formée des différence entre le plus grand élément de A et ses autres éléments.

11 **1.** Pour le cas général, procéder par disjonction de cas en fonction de la façon dont est recouverte la colonne $n+1$:

- Ou bien celle-ci est recouverte par un domino en position verticale
- Ou bien celle-ci est recouverte par deux dominos en position horizontale

2. La suite (a_n) est récurrente linéaire d'ordre 2, avec les conditions initiales on obtient :
$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}\right)$ où : $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Ensuite, montrer que $a_n = \left\lfloor \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \right\rfloor$ revient à montrer que $-\frac{1}{\sqrt{5}}\psi^{n+1} \leq \frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{\sqrt{5}}\psi^{n+1} > -\frac{1}{2}$.

Il suffit donc de montrer que : $\left|\psi\right|^{n+1} < \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Observer que : $\left|\psi\right| = \frac{\sqrt{5}-1}{2} < 1$ donc $\left|\psi\right|^{n+1} \leq \left|\psi\right|$.

12 **1.** Par disjonction de cas : l'ensemble T_{n+1} des rectangles inclus dans le triangle de sommets $(0,0)$, $(0,n+1)$ et $(n+1,0)$ est la réunion de :

- l'ensemble T_n des rectangles inclus dans le triangle de sommets $(0,0)$, $(0,n)$ et $(n,0)$
- l'ensemble A_n des rectangles ayant pour sommet un point A sur l'hypoténuse *i.e.* sur la droite d'équation $y = n+1-x$: $A = (k, n+1-k)$ pour un certain $k \in [\![1\,,n]\!]$.

Dans le deuxième cas : $A_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$ où B_k est l'ensemble des rectangles ayant pour sommet $(k, n+1-k)$.
Former un élément de B_k revient à choisir le point diamétralement opposé à A qui peut-être quelconque dans $[\![0\,,k-1]\!] \times [\![0\,,n-k]\!]$.

2. $R_n = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{k+2}{3} = \binom{n+3}{4}$.

13 **1.** Représenter la somme $x_1 + \cdots + x_n$ comme un mot formé à l'aide des deux symboles « 1 » et « + »
$$\underbrace{(1{+}1{+}\ldots{+}1)}_{x_1 \text{ fois}} + \cdots + \underbrace{(1{+}1{+}\ldots{+}1)}_{x_n \text{ fois}}$$

2. a) Distinguer en fonction de la valeur de $x_{n+1} \in [\![0\,,p]\!]$.
b) Procéder par récurrence sur n.

14 **1.** D'après le cours : $\binom{p}{n}$.

2. On se ramène à la question **1.** : construire une telle famille $(x_1, \ldots, x_n)$ revient à construire la famille $(y_1, \ldots, y_n)$ définie par $y_1 = x_1$, $y_2 = x_1 + x_2$, $\ldots$, $y_n = x_1 + \cdots + x_n$.

3. Il suffit de retrancher au résultat de **2.** le nombre de familles $(x_1, \ldots, x_n)$ pour lesquelles $x_1 + \cdots + x_n \leq p-1$.

Réponse après simplification : $\binom{p-1}{n-1}$

15 **1.** Une telle partie peut être formée en choisissant k éléments dans E puis $p-k$ éléments dans F.

2. Calculer de deux façon le cardinal de l'ensemble $\mathscr{P}$ des parties de $E \cup F$ à p éléments :

- D'une part en utilisant un résultat du cours
- D'autre part en écrivant $\mathscr{P} = \bigcup_{k=0}^{p} \mathscr{P}_k$ où $\mathscr{P}_k$ est l'ensemble des parties à p éléments de $E \cup F$ qui possèdent k éléments de E.

16
- *Première façon :* On utilise : $F = \bigcup_{k=0}^{n} F_k$

où F_k est l'ensemble des couples (A,B) de parties disjointes telles que $|A \cup B| = p$ et $|A| = k$.

- *Deuxième façon :*
  - On choisit une partie X à p éléments (le « futur » $A \cup B$)
  - Puis on choisit une partie A de X (et la partie B est alors déterminée : c'est $X \setminus A$).

17 Notant $\mathscr{C} = \left\{(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2 \mid A \cup B = E\right\}$ écrire $\mathscr{C} = \bigcup_{k=0}^{n} \mathscr{C}_k$ où
$$\mathscr{C}_k = \left\{(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2 \mid A \cup B = E \quad \text{et} \quad |A \cap B| = k\right\}$$
Former un couple (A,B) de $\mathscr{C}_k$ revient à :

- Choisir d'abord les futurs éléments de $A \cap B$
- Puis compléter pour former A (la partie B est alors déterminée)

Réponse : 3^n.

18 Noter $F = \{(A,B) \in \mathscr{P}(E) \times \mathscr{P}(E) \mid A \not\subset B \quad \text{et} \quad B \not\subset A\}$ et dénombrer
$$\overline{F} = \underbrace{\{(A,B) \in \mathscr{P}(E) \times \mathscr{P}(E) \mid A \subset B\}}_{G_1}$$
$$\cup \underbrace{\{(A,B) \in \mathscr{P}(E) \times \mathscr{P}(E) \mid B \subset A\}}_{G_2}$$
En utilisant :
$$\operatorname{Card} G_1 \cup G_2 = \operatorname{Card} G_1 + \operatorname{Card} G_2 - \operatorname{Card}(G_1 \cap G_2)$$
Réponse : $2^{2n} - 2 \times 3^n + 2^n$
(il est aussi possible directement le résultat en commençant par montrer que pour tout $k \in [\![0\,,n]\!]$
$F_k = \{(A,B) \in \mathscr{P}(E) \times \mathscr{P}(E) \mid A \not\subset B \quad \text{et} \quad B \not\subset A \quad \text{et} \quad |A| = k\}$
est de cardinal $\binom{n}{k} \times (2^k - 1) \times (2^{n-k} - 1)$)

19 *Réponse :* $(p+1)^n$.
Procéder par récurrence sur p en laissant n libre.
Plus précisément l'hypothèse de $H(p)$ récurrence sera H(p) : « Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout ensemble E de cardinal n, il y a $(p+1)^n$ familles $(A_1, \ldots, A_p)$ de parties telles que $A_1 \subset \cdots \subset A_p$ ».
Pour l'hérédité, choisir A_{p+1} puis appliquer l'HR dans $E = A_{p+1}$

20 **1.** Dériver par rapport à x la formule de la somme géométrique.

2. Pour M_n : il s'agit de réindexer la somme en sommant par paquets selon la valeur de $k = \max A$

On obtient $M_n = \sum_{k=1}^{n} k 2^{k-1}$.

Avec la question 1 on trouve : $M_n = (n-1)2^n + 1$.
Pour m_n : il s'agit de réindexer la somme en distinguant selon la valeur de $k = \min A$ ($k = 1$ ou $k = 2 \dots$ ou $k = n$).

On obtient $m_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^{n-k} = 2^n \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^k$.

Avec la question 1 on trouve : $M_n = 2^{n+1} - n - 2$.

21 On peut par exemple écrire $|A \cap B| = \displaystyle\sum_{x\in E} \mathbb{1}_{A\cap B}(x)$ puis intervertir les (trois) sommes et utiliser $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x)$.
Réponse : $n4^{n-1}$.

22

1. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, considérer l'ensemble $\mathscr{A}_k$ des permutations $\sigma \in S_n$ pour lesquelles $\sigma([\![1, k]\!]) \in \mathscr{S}$.
2. Calculer $\displaystyle\max_{0\le k\le n} \binom{n}{k}$.

23 Former une telle application $f : [\![1, 3n]\!] \to [\![1, n]\!]$ revient à :

- Choisir les 3 antécédents de 1
- Puis les 3 antécédents de 2 parmi les $3n-3$ éléments restants (ceux de $[\![1, 3n]\!]$ privés des antécédents de 1
- ...

Réponse : $\dfrac{(3n)!}{6^n}$.

24 Noter que $f \circ f = f$ ssi pour tout $y \in f(E)$: $\quad f(y) = y$.
On peut alors écrire $\mathscr{F}$ comme la réunion disjointe des
$$\mathscr{F}_k = \{f \in \mathscr{F} \mid |f(E)| = k\}$$
puis calculer chaque $|\mathscr{F}_k|$

25

1. Construire une telle application revient à choisir une partie $\left\{y_1, \dots, y_p\right\}$ de p éléments de $[\![1, n]\!]$ (il y a une seule application strictement croissante ayant pour image $\left\{y_1, \dots, y_p\right\}$, $f(1)$ est le plus petit élément, $f(2)$ le suivant ,...).
2. Suivre l'indication puis compter le nombre d'applications g possibles.
Réponse : $\binom{n+p-1}{p}$

26

1. Compter le nombre d'applications non surjectives.
Réponse : $2^n - 2$
2. Par étapes successives, construire une telle surjection revient à :
   - Choisir l'éléments $k \in [\![1, n]\!]$ qui possède deux antécédents par f.
   - Puis choisir les deux antécédents de $\{p, q\}$ de k
   - Puis construire une bijection de $E \setminus \{p, q\}$ sur $[\![1, n]\!] \setminus \{k\}$.

   Réponse : $n \times \dfrac{(n+1)!}{2}$

27

1. Une loi de composition interne est une application de $E \times E$ dans E. On peut aussi raisonner par étapes successives en écrivant $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ et en multipliant le nombre de possibilités pour chaque valeur de $x_i \star x_j$ pour tous les $i, j \in [\![1, n]\!]$. *Réponse :* n^{n^2}.
2. Cela revient à choisir un élément neutre $e \in E$ puis, écrivant $E = \{e, x_2, \dots, x_n\}$, à choisir chaque valeur de $x_i \star x_j$ pour tous les $i, j \in [\![2, n]\!]$.
3. En écrivant $E = \{x_1, \dots, x_n\}$, définir une telle loi de composition interne revient à choisir la valeurs des $x_i \star x_j$ pour $i \le j$.