I Expériences aléatoires

On appelle expérience aléatoire toute expérience (ou « épreuve ») dont le résultat est déterminé par le hasard : le résultat de cette expérience ne peut donc pas être connu *a priori*.

1 Univers

Définition 1

Etant donné une expérience aléatoire, l'univers est l'*ensemble* des issues (résultats, réalisations) possibles.

- **Notations.**
  - L'univers est traditionnellement noté Ω.
  - Les éléments de Ω sont notés ω. Un résultat de l'expérience correspond donc à un élément $\omega \in \Omega$.
- **Exemples.**
  - On lance un dé cubique, dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On peut choisir : $\Omega =$
  - On lance une pièce, les issues possibles sont « pile » ou « face ». On peut choisir : $\Omega =$
  - On lance un dé deux fois de suite en notant les résultats obtenus.
    Le résultat peut être représenté par un couple d'entiers (x, y) tous deux compris entre 1 et 6. $\Omega =$
  - On lance la même pièce indéfiniment. $\Omega =$
  - On observe la durée de vie d'un modèle d'ampoule électrique. $\Omega =$

Dans tout ce chapitre, on se limite au cas $\boxed{\Omega \text{ fini}}$.

2 Evénements

Définition 2

Soit Ω un univers fini. Un événement est :

Exemple 1 —
1. On lance un dé, à quelle partie de Ω correspond l'événement A :«Le numéro obtenu est pair» ?
2. Dans l'expérience de deux lancers successifs d'une pièce, trouver un libellé pour $B = \{(P,F),(P,P)\}$.

Dictionnaire ensembles ↔ événements

Langage des ensembles	Langage des événements
$A \in \mathscr{P}(\Omega)$ (ou $A \subset \Omega$)	L'événement A
Ω	
$\varnothing$	
singleton $\{\omega\}$ où $\omega \in \Omega$	
$\overline{A}$	
$A \cup B$	
$A \cap B$	
$A \cap B = \varnothing$	

Exemple 2 — On lance une pièce n fois de suite et on note, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, P_i l'événement « Le i^e lancer donne pile » et F_i l'événement « Le i^e lancer donne face ». Exprimer en fonction des P_i et des F_i (à l'aide de réunions et d'intersections) les événements suivants

a) A : « Les n lancers donnent pile »
b) B : « On n'obtient jamais pile au cours des n lancers »
c) C : « Un seul des n lancers donne pile »
d) D : « On obtient pile au plus une fois au cours des n lancers »

Définition 3

Soit $(A_i)_{1 \le i \le n}$ une famille d'événements. On dit que cette famille est un *système complet d'événements* de Ω si :

i)

ii)

Exemple 3 — 1. Si A est un événement de Ω, alors $(A, \overline{A})$ est un système complet d'événements.
2. Si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ la famille $(\{\omega_i\})_{1 \le i \le n}$ formée des événements élémentaires est un système complet d'événements

Exemple 4 — On lance un dé puis, si le dé donne un nombre pair on lance une pièce truquée qui donne toujours pile, si le dé donne un nombre impair on lance une pièce équilibrée. Donner un système complet d'événements pour cette expérience (en vue de calculer la probabilité d'obtenir pile ...).

Exemple 5 — On tire simultanément n boules dans une urne contenant n boules blanches et n boules noires. On lance ensuite un dé autant de fois que les nombre de boules blanches obtenues. Donner un système complet d'événements pour cette expérience (en vue de calculer la probabilité de faire au moins un six ...).