# II Matrices équivalentes, matrices semblables

## 1 Matrices semblables et trace

• **Cadre.** Dans toute la partie 1, $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont deux matrices carrées de taille $n$.

**Définition 1**

On dit que $B$ est semblable à $A$ si :

• **Traduction en terme d'applications linéaires.** Si $f \in \mathscr{L}(E)$ est donné et si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de $E$ alors les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ sont semblables

**Exercice 1** *La similitude est une relation d'équivalence* — On note $A \sim B$ pour « $B$ est semblable à $A$ ». Montrer que la relation « $\sim$ » ainsi définie est une relation d'équivalence sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

**Définition 2**

On appelle *trace* de $A$ la somme de ses coefficients diagonaux :

**Théorème 1**

1. *Linéarité :*

2. *Symétrie :*

**Exercice 2** *Démonstration du point 2 du théorème* — Démontrer que : $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

**Exemple 1** — Trouver toutes les matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $AB - BA = I_n$.

**Théorème 2**

Si $A$ et $B$ sont semblables alors :

**Exercice 3** — **a)** Démontrer ce résultat. **b)** Montrer que la réciproque de ce théorème est fausse.

**SF 10 : Montrer que deux matrices $A$ et $B$ sont semblables**

On note $f$ l'endomorphisme canoniquement associé à $A$ et on cherche une base $\mathscr{B}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} f = B$

**Exemple 2** *SF 10* — On considère les trois matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Montrer que **a)** $B$ est semblable à $A$. **b)** $C$ est semblable à $A$.

**Exemple 3** — On pose $r = \mathrm{rg}(A)$. Montrer que $A$ est semblable à une matrice $\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}$ où $B \in \mathscr{M}_r(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_{n-r,r}(\mathbb{K})$

• **Trace d'un endomorphisme.** Si $f \in \mathscr{L}(E)$, d'après le théorème 2, les matrices qui représentent $f$ dans les diverses bases de $E$ ont toutes la même trace.
Ceci permet de définir la trace de $f$ : c'est la trace de la matrice de $f$ dans *n'importe quelle* base de $E$.

**Théorème 3 : Trace d'un projecteur**

Si $p$ est un projecteur de $E$, alors :

**Exercice 4** — Démontrer ce théorème en considérant la matrice de $p$ dans une base bien choisie.

## 2 Matrices équivalentes et rang

**Définition 3**

Deux matrices $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si :

• **Interprétations.**
• Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est donnée et si $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ sont des bases de $E$ et $\mathscr{C}, \mathscr{C}'$ sont des bases de $F$ alors les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)$ sont équivalentes.
• $A$ et $B$ sont équivalentes si on peut transformer $A$ en $B$ par opérations élémentaires sur les lignes et colonnes
• **Remarque.** L'équivalence des matrices est une relation d'équivalence.

**Exercice 5** — Soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $p$, $F$ un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n$ et $f \in \mathscr{L}(E,F)$, de rang $r$. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $E$ et une base $\mathscr{C}$ de $F$ telles que : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = J_r$ où : $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

**Théorème 4**

• Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang $r$, alors :

• Deux matrices $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes ssi :

**Exercice 6** — **1.** Démontrer le théorème. **2.** En déduire que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\top)$ (*résultat précédemment admis*)