I Ensembles finis

- **Cadre.** E et F sont des ensembles.

1 Résultats théoriques

Définition 1

- E est dit fini si, pour un certain $n \in \mathbb{N}$:
- Dans ce cas l'entier n est unique :

- **Interprétation:** • L'entier n est :

  • L'application u est :
- **Remarque.** $\mathrm{Card}(\varnothing) = 0$

Exercice 1 — **1.** Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a \leq b$. Montrer que $[\![a, b]\!]$ est fini et que $\mathrm{Card}\big([\![a, b]\!]\big) = b - a + 1$.
2. On suppose que E est fini et qu'il existe une bijection de E sur F. Montrer que F est fini et que $|F| = |E|$

Théorème 1 : Sous-ensembles

Soit A une partie de E, fini : • A est finie et : • $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(E)$ ssi :

Théorème 2 : Réunion

Soient A, B deux ensembles fini : • $\mathrm{Card}(A \cup B) =$

• Si A et B sont disjoints : • Si $A \subset E$: $\mathrm{Card}(\overline{A}) =$

• Pour toutes $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{P}(E)$ deux à deux disjointes :

Théorème 3 : Cas des applications

- Si E est fini et s'il existe une surjection f de E sur F alors :
- Si F est fini et s'il existe une injection f de E dans F alors :

Si E et F sont finis et si $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$ alors, pour toute application $f : E \to F$, il y a équivalence entre :
i) *ii)* *iii)*

- **Principe des tiroirs.** Si on place $n+1$ objets dans n tiroirs, alors l'un des tiroirs contient au moins deux objets

Exemple 1 — Soient $a_1, \ldots a_n \in \mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe i et j tels que $0 \leq i < j \leq n$ et $a_{i+1} + \cdots + a_j \equiv 0\ [n]$.

2 Multiplier ou additionner les résultats ?

- **Principe des bergers.** La réunion disjointe de n ensembles tous de cardinal p est un ensemble de cardinal np

Exemple 2 — Combien y-a-t-il d'entiers pairs formés de trois chiffres (*i.e.* dans l'ensemble $[\![100, 999]\!]$) ?

Exemple 3 — On forme des mots de n lettres avec un alphabet de p lettres. Combien peut-on former de mots ne contenant jamais deux lettres consécutives identiques ?

SF 1 : On multiplie les résultats si

On dénombre par étapes successives : « ... puis ... »
Précisément pour un raisonnement en deux étapes si l'on dénombre :

- n possibilités à l'étape 1
- p possibilités à l'étape 2 **pour chaque possibilité** de l'étape 1

Alors il y a en tout $n \times p$ possibilités

Théorème 4 : Produit cartésien

• Si E et F sont finis : $\mathrm{Card}(E \times F) =$ • Généralisation :

Exercice 2 — Démontrer le premier point par étapes successives.

Théorème 5 : Ensemble des applications de E dans F

Si E et F sont finis, alors l'ensemble $\mathscr{F}(E, F) = F^E$ est fini et :

Exercice 3 — Dénombrer les éléments de $\mathscr{F}(E, F)$ par étapes successives.

SF 1 : On additionne les résultats si

on dénombre par disjonction de cas : « Ou bien ... ou bien ... »

Exemple 4 — On tire une par une sans remise les boules d'une urne contenant n boules rouges distinctes et n vertes distinctes. Combien de tirages donnent un changement de couleur à chaque tirage ?

Exemple 5 — Trouver le nombre de couples $(x, y) \in [\![1, n]\!]^2$ tels que : **a)** $x \leq y$ **b)** $x + y \leq n$