Objectif :

- Découvrir la notion d'ordre

Cadre

$(G,\star)$ est un groupe fini de cardinal n et d'élément neutre e.

Les exercices

Définition de l'ordre

1 12 points – Soit $x \in G$, on pose : $\langle x \rangle = \left\{x^k \,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

1. Montrer que l'application $k \mapsto x^k$ est un morphisme de groupe, non injectif, de $(\mathbb{Z},+)$ dans $(G,\star)$.

2. En déduire que $\langle x \rangle$ est un sous-groupe de G et que $K = \left\{k \in \mathbb{Z} \mid x^k = e\right\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ non réduit à $\{0\}$.

On a vu dans la feuille n° 13 que les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont les ensembles $p\mathbb{Z}$, où p décrit $\mathbb{Z}$ et pour $p \geq 1$: $p = \min(n\mathbb{Z} \cap \mathbb{N}^*)$.
Le raisonnement mené ci-dessus assure donc qu'il existe un unique $p \in \mathbb{N}^*$, appelé ordre de x, *tel que $K = p\mathbb{Z}$.*
De façon équivalente, l'ordre de x est aussi le plus petit entier $k \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $x^k = e$.

Calculs pratique d'ordres

En pratique : pour montrer que x est d'ordre k

Il suffit de montrer que : • $x^k = e$. • Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, si : $x^n = e$, alors : $k \mid n$.

2 6 points – Soient $x \in G$ d'ordre m et soit $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que x^k est d'ordre $\dfrac{m}{m \wedge k}$.