1 Utiliser la matrice pour trouver le noyau et l'image

- **Cadre.** • E est un $\mathbb{K}$-e.v. muni d'une base $\mathscr{B}=(b_1,\dots,b_p)$. • F est un $\mathbb{K}$-e.v. muni d'une base $\mathscr{C}=(c_1,\dots,c_n)$.
- Soit $f\in\mathscr{L}(E,F)$ et $A=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$.
- Soient $x\in E$ et $y\in F$.

Théorème 1

On note : • •

Alors : $f(x)=y \iff$

Exercice 1 — Démontrer le théorème en écrivant la décomposition de $f(x)$ dans la base $\mathscr{C}$.

Exemple 1 SF 2 — Soit f canoniquement associé à $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&-3&3\end{pmatrix}$.Pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, calculer $f(x,y,z)$

Exemple 2 SF 3 SF 4 — Trouver le noyau et l'image de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}_2[X]$ représenté par $\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&2\\2&4&6\end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$

Exemple 3 SF 3 — Soit φ l'endomorphisme de $E=\mathbb{R}_2[X]$ de matrice $A=\begin{pmatrix}0&0&-2\\0&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}$ dans la base canonique.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\left(\varphi-6\mathrm{Id}_E\right)$ et une base de $\mathrm{Im}\,\varphi$

2. Trouver une base de $\mathbb{R}_2[X]$ dans laquelle la matrice de φ est diagonale.

2 Utiliser les matrices pour calculer des composées

- **Cadre.** • $(E,\mathscr{B})$, $(F,\mathscr{C})$ et $(G,\mathscr{D})$ sont des $\mathbb{K}$-e.v. chacun muni d'une base. • $f\in\mathscr{L}(E,F)$ et $g\in\mathscr{L}(F,G)$.

Théorème 2

- **Puissances d'un endomorphisme.** Pour $f\in\mathscr{L}(E)$ si $A=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ alors pour tout $k\in\mathbb{N}$ $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(f^k\right)=$

Exercice 2 — Démontrer le théorème 2.

Exemple 4 ♥ — Soit $f\in\mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est : $A=\begin{pmatrix}3&-2&-2\\2&-1&-2\\2&-2&-1\end{pmatrix}$.
a) Montrer que f est une symétrie **b)** Trouver une base de ses sous-espaces caractéristiques.
c) Ecrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'=(X+1\,,\,X^2+1\,,\,X^2+X+1)$.

3 Utiliser la matrice pour prouver la bijectivité

- **Cadre.** • E et F sont *de même dimension* n.

Théorème 3

Soit $f\in\mathscr{L}(E,F)$. L'application f est bijective si et seulement si :

Dans ce cas :

- **Cas d'un endomorphisme.** $f\in\mathscr{L}(E)$ est bijectif ssi $A=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}f$ est inversible. Dans ce cas : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(f^{-1}\right)=$
- **Cas d'une famille de vecteurs.** Une famille $\mathscr{F}=(u_1,\dots,u_n)$ de n vecteurs de E est une base de E si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\mathscr{F}$ est inversible

Exercice 3 — **a)** ♥ Démontrer le théorème. **b)** Démontrer la conséquence sur les familles de vecteurs

Exemple 5 SF 6 ♥ *Ex. 59.1, banque INP* — Montrer que $f:P\mapsto P-P'$ est un automorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 4 *Conséquence sur l'inversibilité de $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$* — A l'aide du théorème précédent, prouver le résultat précédemment admis : « si il existe $B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB=I_n$ (ou telle que $BA=I_n$) alors A est inversible ».

4 Matrice d'un endomorphisme dans une base bien choisie

SF 7 : Trouver une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}f$ ait une forme spéciale

Exercice 5 — Soit p un projecteur d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n.
Démontrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de p est de la forme : $\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}$.

♥ **Exercice 6** — Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension 3 et $f\in\mathscr{L}(E)$ tel que $f\neq 0$ et $f\circ f=0$.
a) Montrer : $\dim\mathrm{Ker}\,f=2$. **b)** Montrer qu'il existe une base dans laquelle f a pour matrice $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.