III Approximations de sommes par recours aux intégrales

Cette partie est un recueil de techniques classiques dans lesquelles on a recours aux intégrales pour approcher des sommes. Il n'y a pas de théorème à apprendre, il s'agit plutôt d'exemples types à bien savoir refaire.

1 La ruse de l'intégrale de t^k

SF 13 : Mettre une somme sous forme intégrale

Exercice 1 — En remarquant que $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1}\,dt$ calculer la limite de la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

2 Encadrement d'une somme par une intégrale

- **Cadre.** On étudie une somme de la forme $\sum_{k=0}^{n} f(k)$ où f est une fonction monotone.

SF 14 : Effectuer une comparaison somme-intégrale

Exercice 2 — Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, décroissante. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{n+1} f(t)\,dt \leq \sum_{k=0}^{n} f(k) \leq f(0) + \int_0^n f(t)\,dt.$

Exemple 1 *SF 14* — Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^{n} \ln k \geq n \ln n - n + 1.$

Exemple 2 *SF 14* *La somme harmonique* — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que : $H_n \sim \ln n$.

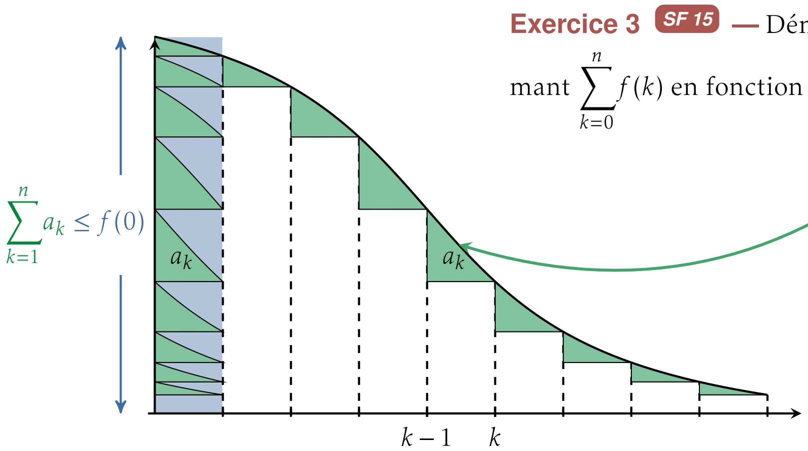
Exemple 3 *SF 14* — Soit $\alpha \in]0,1[$. Déterminer un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

3 Développement asymptotique somme-intégrale

Théorème 1

Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, décroissante. Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

Exercice 3 *SF 15* — Démontrer ce théorème en exprimant $\sum_{k=0}^{n} f(k)$ en fonction de $a_k = \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt - f(k)$.



- **Développement asymptotique de la somme harmonique et constante d'Euler.**

Appliqué avec $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $[1, +\infty[$ on obtient :