III Parties d'un ensemble

- **Cadre.** • E est un ensemble fini de cardinal n. • p est un entier relatif

1 Combinaisons

Définition 1

Une *combinaison de p éléments* de E est :

Exemple 1 — Les combinaisons de deux éléments de $E = \{a, b, c\}$ sont :

- **Remarques:**
  - Dans une combinaison :
  - Dans une combinaison de p éléments, les p éléments en question sont :

Théorème 1

Le nombre de combinaisons de p éléments de E est

Exercice 1 —Démontrer cette formule pour $p \leq n$ en dénombrant autrement le nombre de p-arrangements de E

SF 4 : Dénombrer des tirages simultanés

On tire *simultanément* p boules dans une urne contenant n boules. Le nombre de tirages possibles est : $\binom{n}{p}$.

Exemple 2 — De combien de façons peut-on tirer 3 cartes simultanément dans un jeu de 32 ?

Exemple 3 — Combien d'anagrammes peut-on former à partir du mot $NARVAL$, du mot $ANAGRAMME$?

Exemple 4 — **1.** Combien peut-on former de codes de carte bleue à l'aide de deux chiffres distincts ?

2. Combien y a-t-il de codes de carte bleue formés d'une suite de quatre chiffres strictement croissante ?

- **Retenir.** De façon générale, il y a $\displaystyle\binom{n}{p}$ listes $(x_1, \dots, x_p) \in [\![1, n]\!]^p$ telles que $x_1 < \dots < x_p$.

Exemple 5 — On considère p boules identiques que l'on désire ranger dans n boîtes numérotées de 1 à n (chaque boîte peut recevoir un nombre quelconque de boules). Montrer qu'il y a $\binom{n+p-1}{p}$ rangements possibles.

2 Formulaire à savoir sur les coefficients binomiaux

Théorème 2

• *Symétrie* : $\displaystyle\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ • *Formule de Pascal* : $\displaystyle\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$ • *Formule « sans nom »* : pour n, p non nuls $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$

Exercice 2 ♥ — Etablir la formule de Pascal pour $n \geq 1$ et $p \in [\![0, n]\!]$ en comptant de deux façons le nombre de parties à $p+1$ éléments d'un ensemble $E = \{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ de cardinal $n+1$.

Exercice 3 ♥ — Soit $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ de cardinal $n \geq 1$ et $p \in [\![1, n]\!]$.

1. Montrer la formule « sans nom » en comptant le nombre de façon de former une équipe de p éléments de E dont un élément capitaine.

2. Montrer en procédant de même que pour tout $k \leq p$: $\binom{n}{p}\binom{p}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$ (« formule des titulaires »)

Théorème 3 : Valeurs remarquables à connaître

• $\displaystyle\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ • $\displaystyle\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ • $\displaystyle\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$

3 Dénombrement de $\mathscr{P}(E)$

Théorème 4

L'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties de E est fini et :

Exercice 4 ♥ — Démontrer le résultat précédant.

SF 5 : Exploiter un recouvrement disjoint

Exercice 5 ♥ — **1.** Déterminer le nombre a de couples (A, B) de parties de E tels que $A \cap B = \varnothing$

2. Plus généralement, pour $p \in [\![0, n]\!]$, déterminer le nombre de couples (A, B) de parties de E tels que $|A \cap B| = p$

3. Déterminer le nombre b de couples (A, B) de parties de E tels que $A \subset B$.