III Changement de base

Problématique générale

On donne $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et on note :
• A la matrice de f dans un couple de bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ • A' la matrice de f dans un autre couple de bases $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{C}'$
• **Objectif.** Trouver une expression de A en fonction de A'.

1 Matrice de passage d'une base à une autre

• **Cadre.** $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ sont deux bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.

Définition 1

On appelle matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ la matrice :

• **En pratique.** $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ est la matrice :

Exemple 1 — $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{B}' = (u_1, u_2)$ avec $u_1 = (5,2)$ et $u_2 = (2,1)$. Ecrire $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ et $P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$.

Théorème 1

$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ est inversible et :

Exercice 1 — Démontrer le théorème en traduisant l'inversibilité en terme de bijectivité.

Exercice 2 — Soient $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. On note $L_1, \ldots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés à $x_1, \ldots, x_n$. On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ à la base $(L_1, \ldots, L_n)$.

a) Montrer que pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^j L_i = X^j$. **b)** En déduire l'expression de P^{-1}.

2 Effet sur la matrice d'une application linéaire

• **Cadre.** • $f \in \mathscr{L}(E,F)$. • $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E. • $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont deux bases de F.
On note : • $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)$. • $P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ et $Q = P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}'}$

Théorème 2

Exercice 3 — Démontrer cette formule en traduisant matriciellement l'égalité : $f = \mathrm{Id}_F \circ f \circ \mathrm{Id}_E$.

3 Effet sur la matrice d'un endomorphisme

• **Cadre.** • $f \in \mathscr{L}(E)$. • $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E. • $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} f$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'} f$. • $P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$.
La formule du théorème précédent s'écrit alors :

Théorème 3

Exemple 2 SF 8 — Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -10 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$. On note f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Déterminer une base de $F = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ et une base de $G = \mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id})$
2. Exprimer la matrice A' de f dans la base $\mathscr{B}' = (u_1, u_2)$ de l'exercice 1.
3. En déduire la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4 Effet sur les coordonnées d'un vecteur

• **Cadre.** • $x \in E$. • $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E.
On note : • X la colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}$ • X' la colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}'$ • $P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$

Théorème 4

Exercice 4 — Démontrer la formule du théorème.

Exemple 3 — Soit $v = (2,3)$. Trouver les coordonnées du vecteur v dans la base $\mathscr{B}' = (u_1, u_2)$.