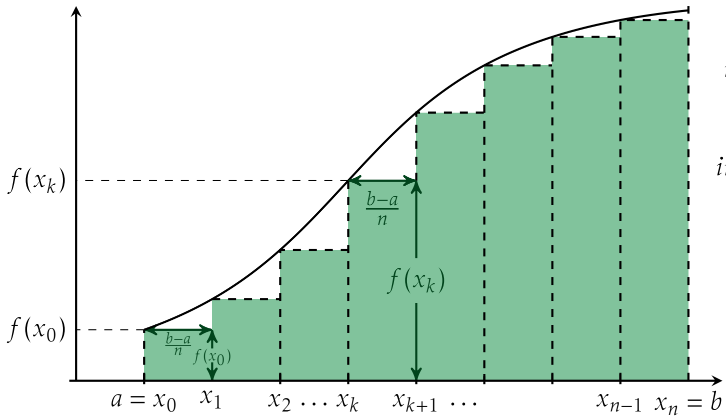
V Calcul approché d'intégrales

- **Cadre.** $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ est continue par morceaux. • On cherche une valeur approchée de $I = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

1 Méthode des rectangles

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on approche $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par sa somme de Riemann $R_n(f)$ (ou $S_n(f)$) : $\boxed{I \approx \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)}$



- **Remarques:**

i) En posant $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, les segments $[x_k, x_{k+1}]$ sont de mêmes longueurs $x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$

ii) La méthode des rectangle repose sur l'approximation :

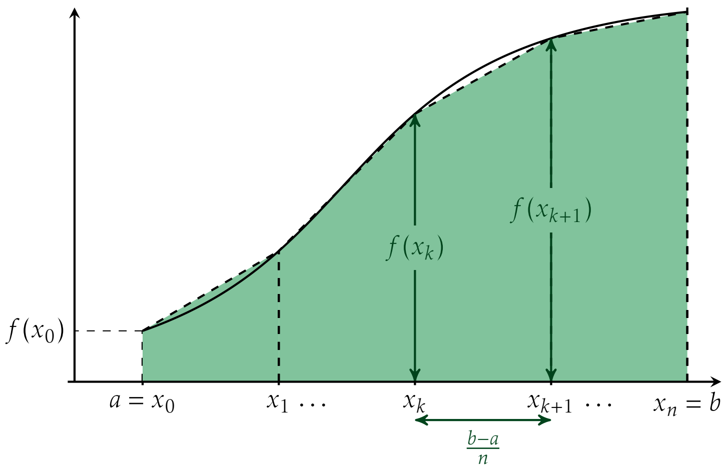
$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t \approx \underbrace{(x_{k+1} - x_k) f(x_k)}_{\text{aire du rectangle}}$$

sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$

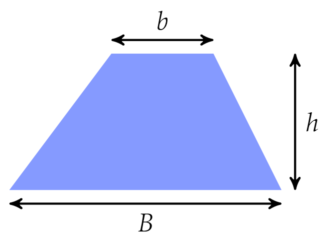
- **Estimation de l'erreur d'approximation.** Dans la preuve de convergence des sommes de Riemann, on a vu que si f est de classe $\mathscr{C}^1$: $|I - R_n(f)| \leq \dfrac{C}{n}$, pour une ceraine constante C. Autrement dit : $\boxed{I \underset{n\to+\infty}{=} R_n(f) + O\left(\frac{1}{n}\right)}$

2 Méthode des trapèzes

En optant pour l'approximation $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t \approx \underbrace{(x_{k+1} - x_k)\frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}}_{\text{Aire d'un trapèze}}$ on obtient : $\boxed{I \approx \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}}$



- **Rappel.**
- L'aide d'un trapèze est donnée par : $\mathscr{A} = \dfrac{(B+b)\times h}{2}$



- **Autre expression de $T_n(f) = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}$.** On dispose d'une expression plus simple de $T_n(f)$ en séparant les sommes et en réindexant :

$$T_n(f) = \frac{b-a}{2n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) + \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right) = \frac{b-a}{2n}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)\right) = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right)$$

- **Estimation de l'erreur d'approximation.** Si f est de classe $\mathscr{C}^2$, on peut démontrer que : $\boxed{I \underset{n\to+\infty}{=} T_n(f) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}$