IV Approximation d'une fonction continue par morceaux

1 Continuité uniforme

- **Cadre.** $f : I \to \mathbb{K}$ est continue *i.e.* :

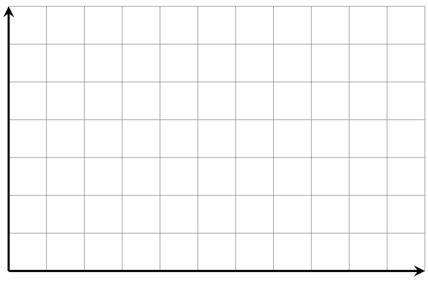
Définition 1

f est *uniformément continue* sur I si :

- **Interprétation.** α ne dépend que de ε, cette réponse de continuité est ainsi *uniforme* par rapport à x.
- **Remarques:**

1. Si f est uniformément continue sur I :

2. Si f est lipshitzienne sur I :



Exercice 1 — Démontrer le point 2.

Théorème 1 : (Théorème de Heine)

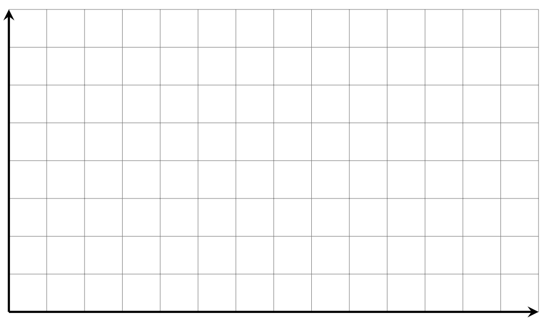
Exercice 2 — Démontrer le théorème par l'absurde.

2 Approximation uniforme par des fonctions en escalier

- **Cadre.** $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$
- **Rappel.** f est bornée sur $[a,b]$. • **Notation.** $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$
- **Rappel.** Pour tous $g \in \mathscr{CM}([a,b],\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$: • $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ • $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \times \|f\|_\infty$

Théorème 2

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
Il existe une fonction φ en escalier sur $[a,b]$ telle que :



Exercice 3 — Démontrer le théorème.

Exercice 4 — Justifier l'existence d'une suite (φ_p) de fonctions en escalier sur $[a,b]$ telle que $\|f-\varphi_p\|_\infty \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

- **Conséquence (rappel) : intégrale d'une fonction continue par morceaux.** La suite des intégrales de fonctions en escalier $\left(\int_{[a,b]} \varphi_p\right)$ est convergente. De plus sa limite ne dépend pas du choix de (φ_p). Ceci permet de définir l'intégrale de f : c'est la limite de $\left(\int_{[a,b]} \varphi_p\right)$ pour *n'importe quelle* suite (φ_p) de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f.

Exemple 1 — Soit $f \in \mathscr{CM}([a,b],\mathbb{R})$. On souhaite montrer : $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0$.

1. Démontrer le résultat lorsque f est en escalier.
2. Conclure dans le cas général.