Probabilités

Chapitre 26

I Expériences aléatoires

Objectif

Etudier une *expérience aléatoire*

= expérience dont le résultat est déterminé par le hasard

Objectif

Etudier une *expérience aléatoire*

= expérience dont le résultat est déterminé par le hasard

Objectif

Etudier une *expérience aléatoire*

= « Mathématiser »

1 Univers

Définition 1

L'univers est l' *ensemble* des résultats possibles.

Exemples

1 Univers

noté Ω

Définition 1

L'univers est l' *ensemble* des résultats possibles.

Exemples

1 Univers

noté Ω

éléments ω de Ω

Définition 1

L'univers est l' *ensemble* des résultats possibles.

Exemples

1 Univers

noté Ω

éléments ω de Ω

Définition 1

L'univers est l' *ensemble* des résultats possibles.

Exemples

- Lancer d'un dé. On peut choisir : $\Omega =$

1 Univers

noté Ω

éléments ω de Ω

Définition 1

L'univers est l' *ensemble* des résultats possibles.

Exemples

- Lancer d'un dé. On peut choisir : $\Omega = [\![1\,,6]\!]$

1 Univers

noté Ω

éléments ω de Ω

Définition 1

L'univers est l' *ensemble* des résultats possibles.

Exemples

- Lancer d'un dé. On peut choisir : $\Omega = [\![1\,,6]\!]$
- Lancer d'une pièce. On peut choisir : $\Omega =$

1 Univers

noté Ω

éléments ω de Ω

Définition 1

L'univers est l' *ensemble* des résultats possibles.

Exemples

- Lancer d'un dé. On peut choisir : $\Omega = [\![1\,,6]\!]$
- Lancer d'une pièce. On peut choisir : $\Omega = \{P, F\}$

1 Univers

noté Ω

éléments ω de Ω

Définition 1

L'univers est l' *ensemble* des résultats possibles.

Exemples

- Lancer d'un dé. On peut choisir : $\Omega = [\![1\,,6]\!]$
- Lancer d'une pièce. On peut choisir : $\Omega = \{P, F\}$
- Deux lancers d'un dé. On peut choisir : $\Omega =$

1 Univers

noté Ω

éléments ω de Ω

Définition 1

L'univers est l' *ensemble* des résultats possibles.

Exemples

- Lancer d'un dé. On peut choisir : $\Omega = [\![1\,,6]\!]$
- Lancer d'une pièce. On peut choisir : $\Omega = \{P, F\}$
- Deux lancers d'un dé. On peut choisir : $\Omega = [\![1\,,6]\!]^2$

1 Univers

noté Ω

éléments ω de Ω

Définition 1

L'univers est l' *ensemble* des résultats possibles.

Exemples

- Lancer d'un dé. On peut choisir : $\Omega = [\![1\,,6]\!]$
- Lancer d'une pièce. On peut choisir : $\Omega = \{P, F\}$
- Deux lancers d'un dé. On peut choisir : $\Omega = [\![1\,,6]\!]^2$
- Lancers infinis d'une pièce. $\Omega =$

1 Univers

noté Ω

éléments ω de Ω

Définition 1

L'univers est l' *ensemble* des résultats possibles.

Exemples

- Lancer d'un dé. On peut choisir : $\Omega = [\![1\,,6]\!]$
- Lancer d'une pièce. On peut choisir : $\Omega = \{P, F\}$
- Deux lancers d'un dé. On peut choisir : $\Omega = [\![1\,,6]\!]^2$
- Lancers infinis d'une pièce. $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}}$

1 Univers

noté Ω

éléments ω de Ω

Définition 1

L'univers est l' *ensemble* des résultats possibles.

Exemples

- Lancer d'un dé. On peut choisir : $\Omega = [\![1\,,6]\!]$
- Lancer d'une pièce. On peut choisir : $\Omega = \{P, F\}$
- Deux lancers d'un dé. On peut choisir : $\Omega = [\![1\,,6]\!]^2$
- Lancers infinis d'une pièce. $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}}$
- Durée de vie d'une ampoule électrique : $\Omega =$

1 Univers

noté Ω

éléments ω de Ω

Définition 1

L'univers est l' *ensemble* des résultats possibles.

Exemples

- Lancer d'un dé. On peut choisir : $\Omega = [\![1\,,6]\!]$
- Lancer d'une pièce. On peut choisir : $\Omega = \{P, F\}$
- Deux lancers d'un dé. On peut choisir : $\Omega = [\![1\,,6]\!]^2$
- Lancers infinis d'une pièce. $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}}$
- Durée de vie d'une ampoule électrique : $\Omega = [0\,, +\infty[$

2 Evénements

Définition 2

Soit Ω un univers fini. Un événement est :

2 Evénements

Définition 2

Soit Ω un univers fini. Un événement est : une partie de Ω

Définition 2

Soit Ω un univers fini. Un événement est : une partie de Ω

Exemple 1

1. On lance un dé, à quelle partie de Ω correspond l'événement A :« Le numéro obtenu est pair » ?

2 Evénements

Définition 2

Soit Ω un univers fini. Un événement est : une partie de Ω

Exemple 1

1. On lance un dé, à quelle partie de Ω correspond l'événement A :« Le numéro obtenu est pair » ?
2. Dans l'expérience de deux lancers successifs d'une pièce, trouver un libellé pour $B = \{(P, F), (P, P)\}$.

2 Evénements

Dictionnaire ensembles $\leftrightarrow$ événements	
Langage des ensembles	**Langage des événements**
Ω	
$\varnothing$	
singleton $\{\omega\}$ où $\omega \in \Omega$	
$\overline{A}$	
$A \cup B$	
$A \cap B$	
$A \cap B = \varnothing$	

2 Evénements

Dictionnaire ensembles $\leftrightarrow$ événements	
Langage des ensembles	**Langage des événements**
Ω	événement certain
$\varnothing$	
singleton $\{\omega\}$ où $\omega \in \Omega$	
$\overline{A}$	
$A \cup B$	
$A \cap B$	
$A \cap B = \varnothing$	

2 Evénements

Dictionnaire ensembles $\leftrightarrow$ événements

Langage des ensembles	Langage des événements
Ω	événement certain
$\varnothing$	événement impossible
singleton $\{\omega\}$ où $\omega \in \Omega$	
$\overline{A}$	
$A \cup B$	
$A \cap B$	
$A \cap B = \varnothing$	

2 Evénements

Dictionnaire ensembles $\leftrightarrow$ événements

Langage des ensembles	Langage des événements
Ω	événement certain
$\varnothing$	événement impossible
singleton $\{\omega\}$ où $\omega \in \Omega$	événement élémentaire
$\overline{A}$	
$A \cup B$	
$A \cap B$	
$A \cap B = \varnothing$	

2 Evénements

Dictionnaire ensembles $\leftrightarrow$ événements

Langage des ensembles	Langage des événements
Ω	événement certain
$\varnothing$	événement impossible
singleton $\{\omega\}$ où $\omega \in \Omega$	événement élémentaire
$\overline{A}$	événement contraire
$A \cup B$	
$A \cap B$	
$A \cap B = \varnothing$	

Dictionnaire ensembles $\leftrightarrow$ événements

Langage des ensembles	Langage des événements
Ω	événement certain
$\varnothing$	événement impossible
singleton $\{\omega\}$ où $\omega \in \Omega$	événement élémentaire
$\overline{A}$	événement contraire
$A \cup B$	A ou B
$A \cap B$	
$A \cap B = \varnothing$	

2 Evénements

Dictionnaire ensembles $\leftrightarrow$ événements	
Langage des ensembles	**Langage des événements**
Ω	événement certain
$\varnothing$	événement impossible
singleton $\{\omega\}$ où $\omega \in \Omega$	événement élémentaire
$\overline{A}$	événement contraire
$A \cup B$	A ou B
$A \cap B$	A et B
$A \cap B = \varnothing$	

2 Evénements

Dictionnaire ensembles $\leftrightarrow$ événements	
Langage des ensembles	**Langage des événements**
Ω	événement certain
$\varnothing$	événement impossible
singleton $\{\omega\}$ où $\omega \in \Omega$	événement élémentaire
$\overline{A}$	événement contraire
$A \cup B$	A ou B
$A \cap B$	A et B
$A \cap B = \varnothing$	A et B sont incompatibles

Dictionnaire ensembles $\leftrightarrow$ événements	
Langage des ensembles	**Langage des événements**
Ω	événement certain
$\varnothing$	événement impossible
singleton $\{\omega\}$ où $\omega \in \Omega$	événement élémentaire
$\overline{A}$	événement contraire
$A \cup B$	A ou B
$A \cap B$	A et B
$A \cap B = \varnothing$	A et B sont incompatibles

Le i^{e} lancer donne pile

Le i^{e} lancer donne face

Exemple 2 : n lancers d'une pièce

Exprimer en fonction des P_i et des F_i les événements suivants

a) A : « Les n lancers donnent pile »

2 Evénements

Dictionnaire ensembles $\leftrightarrow$ événements	
Langage des ensembles	**Langage des événements**
Ω	événement certain
$\varnothing$	événement impossible
singleton $\{\omega\}$ où $\omega \in \Omega$	événement élémentaire
$\overline{A}$	événement contraire
$A \cup B$	A ou B
$A \cap B$	A et B
$A \cap B = \varnothing$	A et B sont incompatibles

Le i^{e} lancer donne pile

Le i^{e} lancer donne face

Exemple 2 : n lancers d'une pièce

Exprimer en fonction des P_i et des F_i les événements suivants

b) B : « On n'obtient jamais pile au cours des n lancers »

Dictionnaire ensembles $\leftrightarrow$ événements

Langage des ensembles	Langage des événements
Ω	événement certain
$\varnothing$	événement impossible
singleton $\{\omega\}$ où $\omega \in \Omega$	événement élémentaire
$\overline{A}$	événement contraire
$A \cup B$	A ou B
$A \cap B$	A et B
$A \cap B = \varnothing$	A et B sont incompatibles

Le i^{e} lancer donne pile

Le i^{e} lancer donne face

Exemple 2 : n lancers d'une pièce

Exprimer en fonction des P_i et des F_i les événements suivants

c) C : « Un seul des n lancers donne pile »

2 Evénements

Dictionnaire ensembles $\leftrightarrow$ événements

Langage des ensembles	Langage des événements
Ω	événement certain
$\varnothing$	événement impossible
singleton $\{\omega\}$ où $\omega \in \Omega$	événement élémentaire
$\overline{A}$	événement contraire
$A \cup B$	A ou B
$A \cap B$	A et B
$A \cap B = \varnothing$	A et B sont incompatibles

Exemple 2 : n lancers d'une pièce

Le i^{e} lancer donne pile

Le i^{e} lancer donne face

Exprimer en fonction des P_i et des F_i les événements suivants

d) D : « On obtient pile au plus une fois au cours des n lancers »

2 Evénements

Définition 3

Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'événements. On dit que cette famille est un *système complet d'événements* de Ω si :

Définition 3

Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'événements. On dit que cette famille est un *système complet d'événements* de Ω si :

i) Les A_i sont deux à deux incompatibles :

2 Evénements

Définition 3

Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'événements. On dit que cette famille est un *système complet d'événements* de Ω si :

i) Les A_i sont deux à deux incompatibles : $A_i \cap A_j = \varnothing$ pour tous $i, j \in [\![1\,,n]\!]$ tels que $i \neq j$

Définition 3

Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille d'événements. On dit que cette famille est un *système complet d'événements* de Ω si :

i) Les A_i sont deux à deux incompatibles : $A_i \cap A_j = \varnothing$ pour tous $i, j \in [\![1\,,n]\!]$ tels que $i \neq j$

ii) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

Définition 3

Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille d'événements. On dit que cette famille est un *système complet d'événements* de Ω si :

i) Les A_i sont deux à deux incompatibles : $A_i \cap A_j = \varnothing$ pour tous $i, j \in [\![1\,,n]\!]$ tels que $i \neq j$

ii) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

Exemple 3

1. La famille $(A, \overline{A})$ où A est un événement de Ω.

2 Evénements

Définition 3

Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille d'événements. On dit que cette famille est un *système complet d'événements* de Ω si :

i) Les A_i sont deux à deux incompatibles : $A_i \cap A_j = \varnothing$ pour tous $i, j \in [\![1\,,n]\!]$ tels que $i \neq j$

ii) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

Exemple 3

1. La famille $(A, \overline{A})$ où A est un événement de Ω.
2. La famille $(\{\omega_i\})_{1\leq i\leq n}$ où : $\quad \Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$

2 Evénements

Définition 3

Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille d'événements. On dit que cette famille est un *système complet d'événements* de Ω si :

i) Les A_i sont deux à deux incompatibles : $A_i \cap A_j = \varnothing$ pour tous $i, j \in [\![1\,,n]\!]$ tels que $i \neq j$

ii) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

Exemple 4 : On lance un dé puis

- si le dé donne un nombre pair on lance une pièce truquée qui donne toujours pile
- si le dé donne un nombre impair on lance une pièce équilibrée.

Donner un système complet d'événements pour cette expérience (en vue de calculer la probabilité d'obtenir pile ...).

Définition 3

Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille d'événements. On dit que cette famille est un *système complet d'événements* de Ω si :

i) Les A_i sont deux à deux incompatibles : $A_i \cap A_j = \varnothing$ pour tous $i, j \in [\![1\,,n]\!]$ tels que $i \neq j$

ii) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

Exemple 5

On tire simultanément n boules dans une urne contenant n boules blanches et n boules noires. On lance ensuite un dé autant de fois que les nombre de boules blanches obtenues. Donner un système complet d'événements pour cette expérience (en vue de calculer la probabilité de faire au moins un six ...).

II Probabilité

1 Définition d'une probabilité

Cadre

- Ω : un univers fini
- $\mathscr{P}(\Omega)$: les événements liés à l'expérience

1 Définition d'une probabilité

Cadre

- Ω : un univers fini
- $\mathscr{P}(\Omega)$: les événements liés à l'expérience

Définition 1

Une probabilité sur Ω est

1 Définition d'une probabilité

Cadre

- Ω : un univers fini
- $\mathscr{P}(\Omega)$: les événements liés à l'expérience

Définition 1

Une probabilité sur Ω est une *application* P :
vérifiant :

1 Définition d'une probabilité

Cadre

- Ω : un univers fini
- $\mathscr{P}(\Omega)$: les événements liés à l'expérience

Définition 1

Une probabilité sur Ω est une *application* $P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0\,,1]$ vérifiant :

1 Définition d'une probabilité

Cadre

- Ω : un univers fini
- $\mathscr{P}(\Omega)$: les événements liés à l'expérience

Définition 1

Une probabilité sur Ω est une *application* $P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0\,,1]$ vérifiant :

i) $P(\Omega) = 1$

1 Définition d'une probabilité

Cadre

- Ω : un univers fini
- $\mathscr{P}(\Omega)$: les événements liés à l'expérience

Définition 1

Une probabilité sur Ω est une *application* $P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0\,,1]$ vérifiant :

i) $P(\Omega) = 1$

ii) Pour tous événements A, B incompatibles :
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

1 Définition d'une probabilité

Cadre

- Ω : un univers fini
- $\mathscr{P}(\Omega)$: les événements liés à l'expérience

Définition 1

Une probabilité sur Ω est une *application* $P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0\,,1]$ vérifiant :

i) $P(\Omega) = 1$

ii) Pour tous événements A, B incompatibles :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Vocabulaire

On dit que (Ω, P) est un espace probabilisé (fini).

1 Définition d'une probabilité

Cadre

- Ω : un univers fini
- $\mathscr{P}(\Omega)$: les événements liés à l'expérience

Définition 1

Une probabilité sur Ω est une *application* $P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0\,,1]$ vérifiant :

i) $P(\Omega) = 1$

ii) Pour tous événements A, B incompatibles :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Vocabulaire

On dit que (Ω, P) est un espace probabilisé (fini).

Remarque

Pour tout événement A : $\quad 0 \leq P(A) \leq 1.$

Théorème 1 : Propriétés des probabilités

Soit Ω un espace probabilisé $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$

Théorème 1 : Propriétés des probabilités

Soit Ω un espace probabilisé $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$

- $\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$

Théorème 1 : Propriétés des probabilités

Soit Ω un espace probabilisé $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$

- $\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$
- $\boxed{P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})}$

Théorème 1 : Propriétés des probabilités

Soit Ω un espace probabilisé $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$

- $\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$
- $\boxed{P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})}$
- Si $A \subset B$: $\boxed{}$

Théorème 1 : Propriétés des probabilités

Soit Ω un espace probabilisé $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$

- $\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$
- $\boxed{P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})}$
- Si $A \subset B$: $\boxed{P(A) \leq P(B)}$

Théorème 1 : Propriétés des probabilités

Soit Ω un espace probabilisé $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$

- $\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$
- $\boxed{P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})}$
- Si $A \subset B$: $\boxed{P(A) \leq P(B)}$
- $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

Théorème 1 : Propriétés des probabilités

Soit Ω un espace probabilisé $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$

- $\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$
- $\boxed{P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})}$
- Si $A \subset B$: $\boxed{P(A) \leq P(B)}$
- $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$
- Si $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{P}(\Omega)$,

  sont deux à deux incompatibles :

Théorème 1 : Propriétés des probabilités

Soit Ω un espace probabilisé $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$

- $\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$
- $\boxed{P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})}$
- Si $A \subset B$: $\boxed{P(A) \leq P(B)}$
- $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$
- Si $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{P}(\Omega)$,

  sont deux à deux incompatibles : $$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

1 Définition d'une probabilité

Théorème 1 : Propriétés des probabilités

Soit Ω un espace probabilisé $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$

- $\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$
- $\boxed{P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})}$
- Si $A \subset B$: $\boxed{P(A) \leq P(B)}$
- $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$
- Si $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{P}(\Omega)$,

  sont deux à deux incompatibles : $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

Exercice 1

Démonter les formules du théorème

2 Exemples de probabilités

Définition 2

La probabilité *uniforme* sur Ω est l'application $P : A \mapsto \dfrac{\mathrm{Card} A}{\mathrm{Card} \Omega}$

i.e. $P(A) =$ ______________________________

2 Exemples de probabilités

Définition 2

La probabilité *uniforme* sur Ω est l'application $P : A \mapsto \dfrac{\mathrm{Card} A}{\mathrm{Card} \Omega}$

i.e. $P(A) = \dfrac{\text{« nombres de cas favorables »}}{\text{« nombres de cas possibles »}}$

Avec cette probabilité,
calcul de proba. = dénombrement.

Définition 2

La probabilité *uniforme* sur Ω est l'application $P : A \mapsto \dfrac{\mathrm{Card} A}{\mathrm{Card}\Omega}$

$$i.e.\ P(A) = \frac{\text{« nombres de cas favorables »}}{\text{« nombres de cas possibles »}}$$

2 Exemples de probabilités

Avec cette probabilité,
calcul de proba. = dénombrement.

Définition 2

La probabilité *uniforme* sur Ω est l'application $P : A \mapsto \dfrac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card} \Omega}$

i.e. $P(A) = \dfrac{\text{« nombres de cas favorables »}}{\text{« nombres de cas possibles »}}$

Exercice 2 : On lance 4 fois un dé équilibré

Quelle est la probabilité d'obtenir 4 numéros différents ?

2 Exemples de probabilités

Avec cette probabilité,
calcul de proba. = dénombrement.

Définition 2

La probabilité *uniforme* sur Ω est l'application $P : A \mapsto \dfrac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card} \Omega}$

$$i.e.\ P(A) = \frac{\text{« nombres de cas favorables »}}{\text{« nombres de cas possibles »}}$$

Exercice 2 : On lance 4 fois un dé équilibré

Quelle est la probabilité d'obtenir 4 numéros différents ?

Remarque

Ce n'est pas la seule probabilité que l'on peut définir sur Ω.

2 Exemples de probabilités

Remarque

Le théorème suivant décrit toutes les probabilités $P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0\,,1]$ que l'on peut définir sur un $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$

Théorème 2

Soient $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{R}$ tels que :

-
-

Il existe une unique proba. P telle que :

Cette probabilité est définie pour $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ par :

2 Exemples de probabilités

Remarque

Le théorème suivant décrit toutes les probabilités $P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0\,,1]$ que l'on peut définir sur un $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$

Théorème 2

Soient $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{R}$ tels que :

- $\forall i \in [\![1\,, n]\!], \quad p_i \in [0\,, 1]$
-

Il existe une unique proba. P telle que :

Cette probabilité est définie pour $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ par :

2 Exemples de probabilités

Remarque

Le théorème suivant décrit toutes les probabilités $P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0\,,1]$ que l'on peut définir sur un $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$

Théorème 2

Soient $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{R}$ tels que :

- $\forall i \in [\![1\,,n]\!], \quad p_i \in [0\,,1]$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Il existe une unique proba. P telle que :

Cette probabilité est définie pour $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ par :

2 Exemples de probabilités

Remarque

Le théorème suivant décrit toutes les probabilités $P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0\,,1]$ que l'on peut définir sur un $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$

Théorème 2

Soient $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{R}$ tels que :

- $\forall i \in [\![1\,, n]\!], \quad p_i \in [0\,, 1]$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Il existe une unique proba. P telle que : $\forall k \in [\![1\,, n]\!],\ P(\{\omega_k\}) = p_k$

Cette probabilité est définie pour $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ par :

2 Exemples de probabilités

Remarque

Le théorème suivant décrit toutes les probabilités $P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0\,,1]$ que l'on peut définir sur un $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$

Théorème 2

Soient $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{R}$ tels que :

- $\forall i \in [\![1\,,n]\!], \quad p_i \in [0\,,1]$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Il existe une unique proba. P telle que : $\forall k \in [\![1\,,n]\!],\ P(\{\omega_k\}) = p_k$

Cette probabilité est définie pour $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ par : $\displaystyle P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$

Pour définir une probabilité P sur Ω
il suffit de définir $(P(\{\omega_1\}), \dots, P(\{\omega_n\}))$

Théorème 2

Soient $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{R}$ tels que :

- $\forall i \in [\![1\,,n]\!], \quad p_i \in [0\,,1]$
- $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$

Il existe une unique proba. P telle que : $\forall k \in [\![1\,,n]\!],\ P(\{\omega_k\}) = p_k$

Cette probabilité est définie pour $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ par : $\quad P(A) = \sum\limits_{\omega_i \in A} p_i$

2 Exemples de probabilités

Pour définir une probabilité P sur Ω
il suffit de définir $(P(\{\omega_1\}), \ldots, P(\{\omega_n\}))$

Théorème 2

Soient $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{R}$ tels que :

- $\forall i \in [\![1\,,n]\!], \quad p_i \in [0\,,1]$
- $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Il existe une unique proba. P telle que : $\forall k \in [\![1\,,n]\!],\ P(\{\omega_k\}) = p_k$

Cette probabilité est définie pour $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ par : $\quad P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$

Exercice 3 : Dé truqué

On lance un dé dont la probabilité d'obtenir la face k est proportionnelle à k. Probabilité d'obtenir un nombre pair ?

Pour définir une probabilité P sur Ω
il suffit de définir $(P(\{\omega_1\}), \ldots, P(\{\omega_n\}))$

Théorèm

Soient $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{R}$ tels que :

- $\forall i \in [\![1\,,n]\!], \quad p_i \in [0\,,1]$
- $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$

Il existe une unique proba. P telle que : $\forall k \in [\![1\,,n]\!],\ P(\{\omega_k\}) = p_k$

Cette probabilité est définie pour $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ par : $\quad P(A) = \sum\limits_{\omega_i \in A} p_i$

Exercice 4 : Une urne contient des boules numérotées

Il y a une boule numérotée « 1 », deux boules indiscernables numérotées « 2 », ..., $2n$ boules indiscernables numérotées « $2n$ ».

1. Définir un univers Ω et une probabilité sur Ω modélisant le tirage.

Pour définir une probabilité P sur Ω il suffit de définir $(P(\{\omega_1\}), \ldots, P(\{\omega_n\}))$

Théorème 2

Soient $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{R}$ tels que :

- $\forall i \in [\![1\,,n]\!], \quad p_i \in [0\,,1]$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Il existe une unique proba. P telle que : $\forall k \in [\![1\,,n]\!],\ P(\{\omega_k\}) = p_k$

Cette probabilité est définie pour $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ par : $\quad P(A) = \displaystyle\sum_{\omega_i \in A} p_i$

Exercice 4 : Une urne contient des boules numérotées

Il y a une boule numérotée « 1 », deux boules indiscernables numérotées « 2 », . . ., $2n$ boules indiscernables numérotées « $2n$ ».

2. Calculer la probabilité de A : « On tire une boule de numéro pair »

3 Probabilité « sachant »

Définition 3

Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ tel que $P(A) > 0$. Pour tout $B \in \mathscr{P}(\Omega)$, la *probabilité de B sachant A* est :

3 Probabilité « sachant »

Définition 3

Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ tel que $P(A) > 0$. Pour tout $B \in \mathscr{P}(\Omega)$, la *probabilité de B sachant A* est : $P_A(B) \underset{\text{déf.}}{=} \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

3 Probabilité « sachant »

Définition 3

Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ tel que $P(A) > 0$. Pour tout $B \in \mathscr{P}(\Omega)$, la *probabilité de B sachant A* est : $P_A(B) \underset{\text{déf.}}{=} \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Remarque

L'application P_A est une probabilité sur Ω.
Le théorème 1 assure donc que : $P_A(\overline{B}) =$

3 Probabilité « sachant »

Définition 3

Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ tel que $P(A) > 0$. Pour tout $B \in \mathscr{P}(\Omega)$, la *probabilité de B sachant A* est : $\quad P_A(B) \underset{\text{déf.}}{=} \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Remarque

L'application P_A est une probabilité sur Ω.
Le théorème 1 assure donc que : $\quad P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$

3 Probabilité « sachant »

Définition 3

Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ tel que $P(A) > 0$. Pour tout $B \in \mathscr{P}(\Omega)$, la *probabilité de B sachant A* est : $\quad P_A(B) \underset{\text{déf.}}{=} \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Remarque

L'application P_A est une probabilité sur Ω.
Le théorème 1 assure donc que : $\quad P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$

☢ Attention ☢

N'inventez pas de formules, par exemple : $\quad P_{\overline{A}}(B) \neq$

3 Probabilité « sachant »

Définition 3

Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ tel que $P(A) > 0$. Pour tout $B \in \mathscr{P}(\Omega)$, la *probabilité de B sachant A* est : $P_A(B) \underset{\text{déf.}}{=} \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Remarque

L'application P_A est une probabilité sur Ω.
Le théorème 1 assure donc que : $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$

☢ Attention ☢

N'inventez pas de formules, par exemple : $P_{\overline{A}}(B) \neq 1 - P_A(B)$

III Utiliser un système complet d'événements

1 Formule des probabilités totales

Théorème 1

Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements de Ω.

Pour tout $B \in \mathscr{P}(\Omega)$:

1 Formule des probabilités totales

Théorème 1

Soit $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet d'événements de Ω.

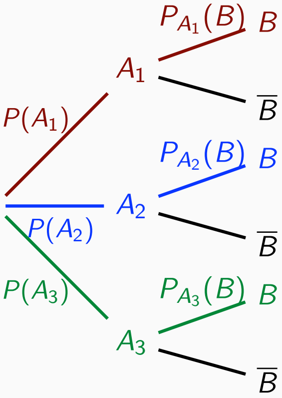
Pour tout $B \in \mathscr{P}(\Omega)$: $\quad P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) P_{A_k}(B)$

1 Formule des probabilités totales

Théorème 1

Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements de Ω.

Pour tout $B \in \mathscr{P}(\Omega)$: $\quad P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) P_{A_k}(B)$

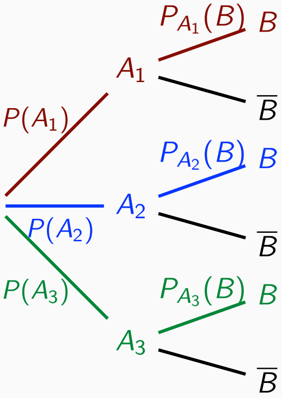


$$P(B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + P(A_3)P_{A_3}(B)$$

Théorème 1

Soit $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet d'événements de Ω.

Pour tout $B \in \mathscr{P}(\Omega)$: $\quad P(B) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P_{A_k}(B)$



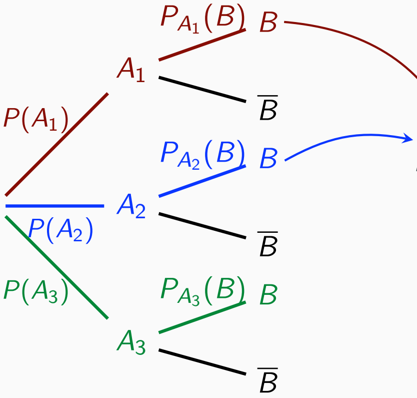
$$P(B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + P(A_3)P_{A_3}(B)$$

1 Formule des probabilités totales

Théorème 1

Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements de Ω.

Pour tout $B \in \mathscr{P}(\Omega)$: $\quad P(B) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(A_k) P_{A_k}(B)$



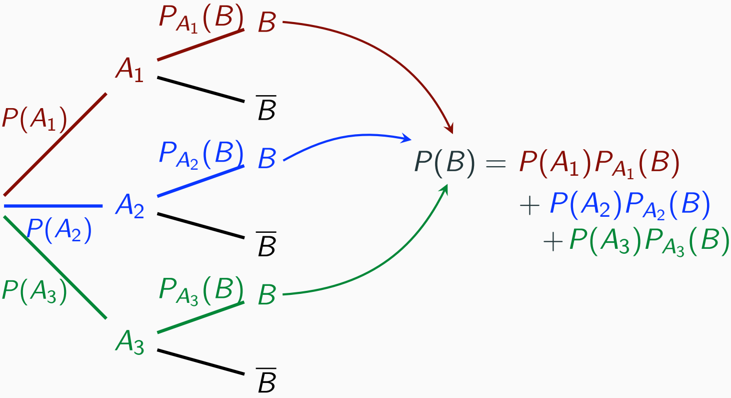
$$P(B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + P(A_3)P_{A_3}(B)$$

1 Formule des probabilités totales

Théorème 1

Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements de Ω.

Pour tout $B \in \mathscr{P}(\Omega)$: $\quad P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) P_{A_k}(B)$



1 Formule des probabilités totales

Théorème 2

Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements de Ω.

Pour tout $B \in \mathscr{P}(\Omega)$: $\quad P(B) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(A_k) P_{A_k}(B)$

Exercice 1 : Ex. 105.1, banque INP

Démontrer la formule.

Théorème 2

Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements de Ω.

Pour tout $B \in \mathscr{P}(\Omega)$: $$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) P_{A_k}(B)$$

Exercice 1 : Ex. 105.1, banque INP

Démontrer la formule.

$B =$

1 Formule des probabilités totales

Théorème 2

Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements de Ω.

Pour tout $B \in \mathscr{P}(\Omega)$: $\quad P(B) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(A_k) P_{A_k}(B)$

Exercice 1 : Ex. 105.1, banque INP

Démontrer la formule.

$$B = \bigcup_{k=1}^{n}$$

1 Formule des probabilités totales

Théorème 2

Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements de Ω.

Pour tout $B \in \mathscr{P}(\Omega)$: $\quad P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) P_{A_k}(B)$

Exercice 1 : Ex. 105.1, banque INP

Démontrer la formule.

$$B = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \cap B$$

1 Formule des probabilités totales

Théorème 2

Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements de Ω.

Pour tout $B \in \mathscr{P}(\Omega)$: $\quad P(B) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(A_k) P_{A_k}(B)$

SF 10 : Calculer $P(A)$ avec la formule des probabilités totales

On l'utilise lorsque la réalisation de A dépend de la réalisation d'autres événements

Théorème 2

Soit $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet d'événements de Ω.

Pour tout $B \in \mathscr{P}(\Omega)$: $$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) P_{A_k}(B)$$

SF 10 : Calculer $P(A)$ avec la formule des probabilités totales

On l'utilise lorsque la réalisation de A dépend de la réalisation d'autres événements

=disjonction de cas

1 Formule des probabilités totales

Théorème 2

Soit $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet d'événements de Ω.

Pour tout $B \in \mathscr{P}(\Omega)$: $$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) P_{A_k}(B)$$

SF 10 : Calculer $P(A)$ avec la formule des probabilités totales

On l'utilise lorsque la réalisation de A dépend de la réalisation d'autres événements

=disjonction de cas

Exemple 1

Une urne contient 7 boules jaunes et 3 boules noires. On effectue deux tirages successifs sans remise dans cette urne. Quelle est la probabilité que la deuxième boule tirée soit jaune ?

1 Formule des probabilités totales

Théorème 2

Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements de Ω.

Pour tout $B \in \mathscr{P}(\Omega)$: $\quad P(B) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(A_k) P_{A_k}(B)$

SF 10 : Calculer $P(A)$ avec la formule des probabilités totales

Exemple 2 : Tirage dans n urnes

On dispose de n urnes $U_1, U_2, \ldots, U_n$. Pour tout $k \in [\![1\,,n]\!]$, l'urne U_k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires. On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans cette urne.
Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?

1 Formule des probabilités totales

Théorème 2

Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements de Ω.

Pour tout $B \in \mathscr{P}(\Omega)$: $\quad P(B) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(A_k) P_{A_k}(B)$

Exemple 3 : On effectue des tirages successifs comme suit

L'urne U_1 contient 3 boules blanches et 1 noire, l'urne U_2 contient 1 boule blanche et 4 noires. On choisit d'abord une urne au hasard. On tire une boule dans cette urne, on note sa couleur et on la remet dans l'urne. Si la boule est blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1 ; sinon le tirage suivant se fait dans U_2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n la probabilité que le n^{e} tirage donne une boule blanche. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$

2 Formule de Bayes ou « de probabilités des causes »

Théorème 3

Soit $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ de probabilité non nulle.

1. Pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$:

2 Formule de Bayes ou « de probabilités des causes »

Théorème 3

Soit $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ de probabilité non nulle.

1. Pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$: $$P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)}.$$

2 Formule de Bayes ou « de probabilités des causes »

Théorème 3

Soit $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ de probabilité non nulle.

1. Pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$: $$P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)}.$$
2. Si $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements :

2 Formule de Bayes ou « de probabilités des causes »

Théorème 3

Soit $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ de probabilité non nulle.

1. Pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$: $\qquad P_B(A) = \dfrac{P_A(B)P(A)}{P(B)}.$
2. Si $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements :

$$\forall i \in [\![1\,,n]\!], \quad P_B(A_i) = \frac{P_{A_i}(B)P(A_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(A_k)P_{A_k}(B)}.$$

2 Formule de Bayes ou « de probabilités des causes »

Théorème 3

Soit $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ de probabilité non nulle.

1. Pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$: $$P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)}.$$
2. Si $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements :

$$\forall i \in [\![1\,,n]\!], \quad P_B(A_i) = \frac{P_{A_i}(B)P(A_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(A_k)P_{A_k}(B)}.$$

Exercice 2 : Ex. 105.1, banque INP

Démontrer ces deux formules.

2 Formule de Bayes ou « de probabilités des causes »

Théorème 3

Soit $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ de probabilité non nulle.

1. Pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$: $$P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)}.$$

SF 13 : Utiliser la formule pour « remonter le temps. »

Exemple 4

On effectue deux tirages successifs sans remise dans une urne de 7 boules jaunes et 3 boules noires. La deuxième boule tirée est jaune. Quelle est la probabilité que la première boule tirée ait été noire ?

Théorème 3

Soit $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ de probabilité non nulle.

1. Pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$: $$P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)}.$$

SF 13 : Utiliser la formule pour « remonter le temps. »

Exemple 5 : Tirage dans n urnes (suite de l'exemple 3)

On observe que la boule tirée est blanche.
Pour $k \in [\![1\,,n]\!]$, quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne U_k ?

2 Formule de Bayes ou « de probabilités des causes »

Théorème 3

Soit $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ de probabilité non nulle.

1. Pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$: $$P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)}.$$

Exemple 6 : Test d'une maladie rare

Un laboratoire propose un test de dépistage d'une maladie : lorsque le test est appliqué à une personne malade, il est positif dans 99.8% des cas ; lorsqu'il est appliqué à une personne saine, il est négatif dans 99.6% des cas.
D'autre part, on sait qu'une personne sur 100 000 est malade.
Le test est-il fiable ? On répondra en se basant sur la probabilité d'être malade sachant que le test est positif.

IV Probabilité d’une intersection

1 Formule des probabilités composées

connaissant $P_A(B)$

En pratique : calculer $P(A \cap B)$

En général on *cherche* $P(A \cap B)$:

$$\boxed{P(A \cap B) = }$$

1 Formule des probabilités composées

connaissant $P_A(B)$

En pratique : calculer $P(A \cap B)$

En général on *cherche* $P(A \cap B)$:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P_A(B)}$$

1 Formule des probabilités composées

En pratique : calculer $P(A \cap B)$

connaissant $P_A(B)$

produit nul par convention si $P(A) = 0$

En général on *cherche* $P(A \cap B)$: $\boxed{P(A \cap B) = P(A)P_A(B)}$

1 Formule des probabilités composées

connaissant $P_A(B)$

produit nul par convention si $P(A) = 0$

En pratique : calculer $P(A \cap B)$

En général on *cherche* $P(A \cap B)$: $\boxed{P(A \cap B) = P(A)P_A(B)}$

Théorème 1 : Formule des probabilités composées

Pour tous $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{P}(\Omega)$:

1 Formule des probabilités composées

En pratique : calculer $P(A \cap B)$

connaissant $P_A(B)$

produit nul par convention si $P(A) = 0$

En général on *cherche* $P(A \cap B)$: $\boxed{P(A \cap B) = P(A)P_A(B)}$

Théorème 1 : Formule des probabilités composées

Pour tous $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{P}(\Omega)$:

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \ldots P_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

1 Formule des probabilités composées

En pratique : calculer $P(A \cap B)$

En général on *cherche* $P(A \cap B)$: $\boxed{P(A \cap B) = P(A)P_A(B)}$

Théorème 1 : Formule des probabilités composées

Pour tous $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathscr{P}(\Omega)$:

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Exercice 1

Démontrer cette formule.

1 Formule des probabilités composées

En pratique : calculer $P(A \cap B)$

En général on *cherche* $P(A \cap B)$: $\boxed{P(A \cap B) = P(A)P_A(B)}$

Théorème 1 : Formule des probabilités composées

Pour tous $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathscr{P}(\Omega)$:

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Exercice 2

On effectue trois tirages successifs et sans remise d'une boule dans une urne contenant 4 boules blanches et 6 boules noires. Calculer la probabilité d'obtenir trois boules blanches.

1 Formule des probabilités composées

En pratique : calculer $P(A \cap B)$

En général on *cherche* $P(A \cap B)$:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P_A(B)}$$

Théorème 1 : Formule des probabilités composées

Pour tous $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{P}(\Omega)$:

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \ldots P_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Exercice 3

Un gardien possède n clés pour ouvrir une porte dans le noir : il essaie les clés au hasard une après l'autre et n'utilise jamais deux fois la même clé. Avec quelle probabilité ouvre-t-il la porte au k^{e} essai ?

2 Indépendance de deux événements

Définition 1

A et B sont dits indépendants si :

2 Indépendance de deux événements

Définition 1

A et B sont dits indépendants si : $\quad P(A \cap B) = P(A)P(B)$

2 Indépendance de deux événements

Définition 1

A et B sont dits indépendants si : $\quad P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Remarque

Si $P(A) \neq 0$, alors A et B sont indépendants ssi :

2 Indépendance de deux événements

Définition 1

A et B sont dits indépendants si : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Remarque

Si $P(A) \neq 0$, alors A et B sont indépendants ssi : $P_A(B) = P(B)$

2 Indépendance de deux événements

Définition 1

A et B sont dits indépendants si : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Remarque

Si $P(A) \neq 0$, alors A et B sont indépendants ssi : $P_A(B) = P(B)$

Théorème 2

Si A et B sont indépendants, alors il en va de même de :

2 Indépendance de deux événements

Définition 1

A et B sont dits indépendants si : $\quad P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Remarque

Si $P(A) \neq 0$, alors A et B sont indépendants ssi : $P_A(B) = P(B)$

Théorème 2

Si A et B sont indépendants, alors il en va de même de :

2 Indépendance de deux événements

Définition 1

A et B sont dits indépendants si : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Remarque

Si $P(A) \neq 0$, alors A et B sont indépendants ssi : $P_A(B) = P(B)$

Théorème 2

Si A et B sont indépendants, alors il en va de même de :
A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et B $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

2 Indépendance de deux événements

Définition 1

A et B sont dits indépendants si : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Remarque

Si $P(A) \neq 0$, alors A et B sont indépendants ssi : $P_A(B) = P(B)$

Théorème 2

Si A et B sont indépendants, alors il en va de même de :
A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et B $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

Exercice 4

Montrer que si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont indépendants.

3 Indépendance pour une famille d'événements

Définition 2

On dit que n événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont (mutuellement) indépendants si, pour toute partie I de $[\![1\,,n]\!]$

3 Indépendance pour une famille d'événements

Définition 2

On dit que n événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont (mutuellement) indépendants si, pour toute partie I de $[\![1\,,n]\!]$

$$P\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \prod_{i\in I} P(A_i)$$

3 Indépendance pour une famille d'événements

Le théorème 2 se généralise

Définition 2

On dit que n événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont (mutuellement) indépendants si, pour toute partie I de $[\![1\,,n]\!]$

$$P\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \prod_{i\in I} P(A_i)$$

3 Indépendance pour une famille d'événements

Définition 2

On dit que n événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont (mutuellement) indépendants si, pour toute partie I de $[\![1\,,n]\!]$

$$P\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \prod_{i\in I} P(A_i)$$

3 Indépendance pour une famille d'événements

Définition 2

On dit que n événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont (mutuellement) indépendants si, pour toute partie I de $[\![1\,, n]\!]$

$$P\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

Exemple 1 : Trois événements A, B, C sont indépendants ssi

3 Indépendance pour une famille d'événements

Définition 2

On dit que n événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont (mutuellement) indépendants si, pour toute partie I de $[\![1\,,n]\!]$

$$P\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \prod_{i\in I} P(A_i)$$

Exemple 1 : Trois événements A, B, C sont indépendants ssi

- $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$

3 Indépendance pour une famille d'événements

Définition 2

On dit que n événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont (mutuellement) indépendants si, pour toute partie I de $[\![1\,,n]\!]$

$$P\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \prod_{i\in I} P(A_i)$$

Exemple 1 : Trois événements A, B, C sont indépendants ssi

- $P(A\cap B\cap C) = P(A)P(B)P(C)$
- $P(A\cap B) = P(A)P(B)$

3 Indépendance pour une famille d'événements

Définition 2

On dit que n événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont (mutuellement) indépendants si, pour toute partie I de $[\![1\,,n]\!]$

$$P\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \prod_{i\in I} P(A_i)$$

Exemple 1 : Trois événements A, B, C sont indépendants ssi

- $P(A\cap B\cap C) = P(A)P(B)P(C)$
- $P(A\cap B) = P(A)P(B)$
- $P(A\cap C) = P(A)P(C)$

3 Indépendance pour une famille d'événements

Définition 2

On dit que n événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont (mutuellement) indépendants si, pour toute partie I de $[\![1\,,n]\!]$

$$P\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \prod_{i\in I} P(A_i)$$

Exemple 1 : Trois événements A, B, C sont indépendants ssi

- $P(A\cap B\cap C) = P(A)P(B)P(C)$
- $P(A\cap B) = P(A)P(B)$
- $P(A\cap C) = P(A)P(C)$
- $P(B\cap C) = P(B)P(C)$

3 Indépendance pour une famille d'événements

Définition 2

On dit que n événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont (mutuellement) indépendants si, pour toute partie I de $[\![1\,,n]\!]$

$$P\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \prod_{i\in I} P(A_i)$$

Exemple 1 : Trois événements A, B, C sont indépendants ssi

- $P(A\cap B\cap C) = P(A)P(B)P(C)$
- $P(A\cap B) = P(A)P(B)$
- $P(A\cap C) = P(A)P(C)$
- $P(B\cap C) = P(B)P(C)$

☢ Plus restrictif que :
« deux à deux indépendants » ☢

3 Indépendance pour une famille d'événements

Situations classiques d'indépendances.

On répète une $\boxed{\text{même}}$ expérience $\boxed{\text{sans}}$ modifier les conditions

3 Indépendance pour une famille d'événements

Situations classiques d'indépendances.

On répète une $\boxed{\text{même}}$ expérience $\boxed{\text{sans}}$ modifier les conditions

Exercice 5

On effectue trois tirages successifs et *avec* remise d'une boule dans une urne contenant 4 boules blanches et 6 boules noires. Calculer la probabilité d'obtenir trois boules blanches.

3 Indépendance pour une famille d'événements

Situations classiques d'indépendances.

On répète une même expérience sans modifier les conditions

Exercice 6 : On lance n fois de suite une pièce équilibrée.

1. A partir de quelle valeur de n la probabilité que les deux faces de la pièce apparaissent au cours des n lancers est-elle $\geq 0,9$?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir au plus un pile ?