Dénombrement

Chapitre 25

I Ensembles finis

1 Résultats théoriques

Définition 1

- E est dit fini si, pour un certain $n \in \mathbb{N}$:

Interprétation

- L'entier n est :

1 Résult iques

Ensemble

Définition 1

- E est dit fini si, pour un certain $n \in \mathbb{N}$:

Interprétation

- L'entier n est :

1 Résult… iques

Ensemble

Définition 1

- E est dit fini si, pour un certain $n \in \mathbb{N}$: il existe une bijection u de $[\![1\,,n]\!]$ sur E.

Interprétation

- L'entier n est :

1 Résult ques

Ensemble

Définition 1

- E est dit fini si, pour un certain $n \in \mathbb{N}$: il existe une bijection u de $[\![1\,,n]\!]$ sur E.
- Dans ce cas l'entier n est unique :

Interprétation

- L'entier n est :

1 Résult[illegible]iques

Ensemble

Définition 1

- E est dit fini si, pour un certain $n \in \mathbb{N}$: il existe une bijection u de $[\![1\,,n]\!]$ sur E.
- Dans ce cas l'entier n est unique : appelé *cardinal* de E, noté $\mathrm{Card}(E)$, ou $|E|$

Interprétation

- L'entier n est :

1 Résult… iques

Ensemble

Définition 1

- E est dit fini si, pour un certain $n \in \mathbb{N}$: il existe une bijection u de $[\![1\,,n]\!]$ sur E.
- Dans ce cas l'entier n est unique : appelé *cardinal* de E, noté $\mathrm{Card}(E)$, ou $|E|$

Interprétation

- L'entier n est : le nombre d'éléments de E

1 Résult[illegible]iques

Ensemble

Définition 1

- E est dit fini si, pour un certain $n \in \mathbb{N}$: il existe une bijection u de $[\![1\,,n]\!]$ sur E.
- Dans ce cas l'entier n est unique : appelé *cardinal* de E, noté $\mathrm{Card}(E)$, ou $|E|$

$\mathrm{Card}(\varnothing) = 0$

Interprétation

- L'entier n est : le nombre d'éléments de E

1 Résult…iques

Ensemble

Définition 1

- E est dit fini si, pour un certain $n \in \mathbb{N}$: il existe une bijection u de $[\![1\,,n]\!]$ sur E.
- Dans ce cas l'entier n est unique : appelé *cardinal* de E, noté $\mathrm{Card}(E)$, ou $|E|$

$\mathrm{Card}(\varnothing) = 0$

Interprétation

- L'entier n est : le nombre d'éléments de E
- L'application u est :

1 Résult… iques

Ensemble

Définition 1

- E est dit fini si, pour un certain $n \in \mathbb{N}$: il existe une bijection u de $[\![1\,,\,n]\!]$ sur E.
- Dans ce cas l'entier n est unique : appelé *cardinal* de E, noté $\mathrm{Card}(E)$, ou $|E|$

$\mathrm{Card}(\varnothing) = 0$

Interprétation

- L'entier n est : le nombre d'éléments de E
- L'application u est : une numérotation des éléments de E.

1 Résultats théoriques

Ensemble

Définition 1

- E est dit fini si, pour un certain $n \in \mathbb{N}$: il existe une bijection u de $[\![1\,,n]\!]$ sur E.
- Dans ce cas l'entier n est unique : appelé *cardinal* de E, noté $\text{Card}(E)$, ou $|E|$

Interprétation

$\text{Card}(\varnothing) = 0$

- L'entier n est : le nombre d'éléments de E
- L'application u est : une numérotation des éléments de E.

Exercice 1

1. Montrer que $[\![a\,,b]\!]$ est fini et que $\text{Card}\big([\![a\,,b]\!]\big) = b - a + 1$.

1 Résultats théoriques

Définition 1 — Ensemble

- E est dit fini si, pour un certain $n \in \mathbb{N}$: il existe une bijection u de $[\![1\,,n]\!]$ sur E.
- Dans ce cas l'entier n est unique : appelé *cardinal* de E, noté $\mathrm{Card}(E)$, ou $|E|$

Interprétation

$\mathrm{Card}(\varnothing) = 0$

- L'entier n est : le nombre d'éléments de E
- L'application u est : une numérotation des éléments de E.

Exercice 1

2. On suppose que E est fini et qu'il existe une bijection de E sur F. Montrer que F est fini et que $\mathrm{Card}(F) = \mathrm{Card}(E)$

1 Résultats théoriques

Théorème 1 : Sous-ensembles

Soit A une partie de E, fini :

- A est finie et :
- $\text{Card}(A) = \text{Card}(E)$ ssi :

1 Résultats théoriques

Théorème 1 : Sous-ensembles

Soit A une partie de E, fini :

- A est finie et : $|A| \leq |E|$
- $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(E)$ ssi :

1 Résultats théoriques

Théorème 1 : Sous-ensembles

Soit A une partie de E, fini :

- A est finie et : $|A| \leq |E|$
- $\text{Card}(A) = \text{Card}(E)$ ssi : $A = E$

1 Résultats théoriques

Théorème 1 : Sous-ensembles

Soit A une partie de E, fini :

- A est finie et : $|A| \leq |E|$
- $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(E)$ ssi : $A = E$

Théorème 2 : Réunion

1 Résultats théoriques

Théorème 1 : Sous-ensembles

Soit A une partie de E, fini :

- A est finie et : $|A| \leq |E|$
- $\text{Card}(A) = \text{Card}(E)$ ssi : $A = E$

Théorème 2 : Réunion

- $\text{Card}(A \cup B) =$

1 Résultats théoriques

Théorème 1 : Sous-ensembles

Soit A une partie de E, fini :

- A est finie et : $|A| \leq |E|$
- $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(E)$ ssi : $A = E$

Théorème 2 : Réunion

- $\mathrm{Card}(A \cup B) = |A| + |B| - |A \cap B|$

1 Résultats théoriques

Théorème 1 : Sous-ensembles

Soit A une partie de E, fini :

- A est finie et : $|A| \leq |E|$
- $\text{Card}(A) = \text{Card}(E)$ ssi : $A = E$

Théorème 2 : Réunion

- $\text{Card}(A \cup B) = |A| + |B| - |A \cap B|$
- Si A et B sont disjoints :

1 Résultats théoriques

Théorème 1 : Sous-ensembles

Soit A une partie de E, fini :

- A est finie et : $|A| \leq |E|$
- $\text{Card}(A) = \text{Card}(E)$ ssi : $A = E$

Théorème 2 : Réunion

- $\text{Card}(A \cup B) = |A| + |B| - |A \cap B|$
- Si A et B sont disjoints : $\text{Card}(A \cup B) = |A| + |B|$

1 Résultats théoriques

Théorème 1 : Sous-ensembles

Soit A une partie de E, fini :

- A est finie et : $|A| \leq |E|$
- $\text{Card}(A) = \text{Card}(E)$ ssi : $A = E$

Théorème 2 : Réunion

- $\text{Card}(A \cup B) = |A| + |B| - |A \cap B|$
- Si A et B sont disjoints : $\text{Card}(A \cup B) = |A| + |B|$
- Si $A \subset E$: $\text{Card}(\overline{A}) =$

1 Résultats théoriques

Théorème 1 : Sous-ensembles

Soit A une partie de E, fini :

- A est finie et : $|A| \leq |E|$
- $\text{Card}(A) = \text{Card}(E)$ ssi : $A = E$

Théorème 2 : Réunion

- $\text{Card}(A \cup B) = |A| + |B| - |A \cap B|$
- Si A et B sont disjoints : $\text{Card}(A \cup B) = |A| + |B|$
- Si $A \subset E$: $\text{Card}(\overline{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$

1 Résultats théoriques

Théorème 1 : Sous-ensembles

Soit A une partie de E, fini :

- A est finie et : $|A| \leq |E|$
- $\text{Card}(A) = \text{Card}(E)$ ssi : $A = E$

Théorème 2 : Réunion

- $\text{Card}(A \cup B) = |A| + |B| - |A \cap B|$
- Si A et B sont disjoints : $\text{Card}(A \cup B) = |A| + |B|$
- Si $A \subset E$: $\text{Card}(\overline{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$
- Pour toutes parties $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{P}(E)$ deux à deux disjointes :

1 Résultats théoriques

Théorème 1 : Sous-ensembles

Soit A une partie de E, fini :

- A est finie et : $|A| \leq |E|$
- $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(E)$ ssi : $A = E$

Théorème 2 : Réunion

- $\mathrm{Card}(A \cup B) = |A| + |B| - |A \cap B|$
- Si A et B sont disjoints : $\mathrm{Card}(A \cup B) = |A| + |B|$
- Si $A \subset E$: $\mathrm{Card}(\overline{A}) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A)$
- Pour toutes parties $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{P}(E)$ deux à deux disjointes :

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

1 Résultats théoriques

Théorème 1 : Réunion

- $\text{Card}(A \cup B) = |A| + |B| - |A \cap B|$
- Si A et B sont disjoints : $\text{Card}(A \cup B) = |A| + |B|$
- Si $A \subset E$: $\text{Card}(\overline{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$
- Pour toutes parties $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{P}(E)$ deux à deux disjointes :
$$\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

Théorème 2 : Cas des applications

- Si E est fini et s'il existe une surjection f de E sur F alors :

1 Résultats théoriques

Théorème 1 : Réunion

- $\text{Card}(A \cup B) = |A| + |B| - |A \cap B|$
- Si A et B sont disjoints : $\text{Card}(A \cup B) = |A| + |B|$
- Si $A \subset E$: $\quad \text{Card}(\overline{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$
- Pour toutes parties $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{P}(E)$ deux à deux disjointes :
$$\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

Théorème 2 : Cas des applications

- Si E est fini et s'il existe une surjection f de E sur F alors :
  F est fini et $|F| \leq |E|$

1 Résultats théoriques

Théorème 1 : Réunion

- $\mathrm{Card}(A \cup B) = |A| + |B| - |A \cap B|$
- Si A et B sont disjoints : $\mathrm{Card}(A \cup B) = |A| + |B|$
- Si $A \subset E$: $\mathrm{Card}(\overline{A}) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A)$
- Pour toutes parties $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{P}(E)$ deux à deux disjointes :

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

Théorème 2 : Cas des applications

- Si E est fini et s'il existe une surjection f de E sur F alors :
  F est fini et $|F| \leq |E|$
- Si F est fini et s'il existe une injection f de E dans F alors :

1 Résultats théoriques

Théorème 1 : Réunion

- $\text{Card}(A \cup B) = |A| + |B| - |A \cap B|$
- Si A et B sont disjoints : $\text{Card}(A \cup B) = |A| + |B|$
- Si $A \subset E$: $\text{Card}(\overline{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$
- Pour toutes parties $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{P}(E)$ deux à deux disjointes :
$$\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

Théorème 2 : Cas des applications

- Si E est fini et s'il existe une surjection f de E sur F alors :
F est fini et $|F| \leq |E|$
- Si F est fini et s'il existe une injection f de E dans F alors :
E est fini et $|E| \leq |F|$

1 Résultats théoriques

Théorème 2 : Cas des applications

- Si E est fini et s'il existe une surjection f de E sur F alors :
  F est fini et $|F| \leq |E|$
- Si F est fini et s'il existe une injection f de E dans F alors :
  E est fini et $|E| \leq |F|$

Si E et F sont finis et $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$, il y a équivalence entre
i) ii) iii)

1 Résultats théoriques

Théorème 2 : Cas des applications

- Si E est fini et s'il existe une surjection f de E sur F alors : F est fini et $|F| \leq |E|$
- Si F est fini et s'il existe une injection f de E dans F alors : E est fini et $|E| \leq |F|$

Si E et F sont finis et $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$, il y a équivalence entre

i) f est injective ii) iii)

1 Résultats théoriques

Théorème 2 : Cas des applications

- Si E est fini et s'il existe une surjection f de E sur F alors :
  F est fini et $|F| \leq |E|$
- Si F est fini et s'il existe une injection f de E dans F alors :
  E est fini et $|E| \leq |F|$

Si E et F sont finis et $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$, il y a équivalence entre
i) f est injective ii) f est surjective iii)

1 Résultats théoriques

Théorème 2 : Cas des applications

- Si E est fini et s'il existe une surjection f de E sur F alors :
  F est fini et $|F| \leq |E|$
- Si F est fini et s'il existe une injection f de E dans F alors :
  E est fini et $|E| \leq |F|$

Si E et F sont finis et $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$, il y a équivalence entre
i) f est injective ii) f est surjective iii) f est bijective

1 Résultats théoriques

Théorème 2 : Cas des applications

- Si E est fini et s'il existe une surjection f de E sur F alors :
  F est fini et $|F| \leq |E|$
- Si F est fini et s'il existe une injection f de E dans F alors :
  E est fini et $|E| \leq |F|$

Si E et F sont finis et $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$, il y a équivalence entre
i) f est injective ii) f est surjective iii) f est bijective

Principe des tiroirs

Si on place $n+1$ objets dans n tiroirs, alors l'un des tiroirs contient au moins deux objets

Théorème 2 : Cas des applications

- Si E est fini et s'il existe une surjection f de E sur F alors :
  F est fini et $|F| \leq |E|$
- Si F est fini et s'il existe une injection f de E dans F alors :
  E est fini et $|E| \leq |F|$

Si E et F sont finis et $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$, il y a équivalence entre
i) f est injective ii) f est surjective iii) f est bijective

Principe des tiroirs

Si on place $n+1$ objets dans n tiroirs, alors l'un des tiroirs contient au moins deux objets

Exemple 1 : $a_1, \ldots a_n \in \mathbb{Z}$

Montrer qu'il existe $0 \leq i < j \leq n$ tels que $a_{i+1} + \cdots + a_j \equiv 0 \ [n]$

2 Multiplier ou additionner les résultats ?

Principe des bergers

La réunion disjointe de n ensembles tous de cardinal p est un ensemble de cardinal np

SF 1 : Dénombrement par étapes successives

2 Multiplier ou additionner les résultats ?

Principe des bergers

La réunion disjointe de n ensembles tous de cardinal p est un ensemble de cardinal np

Si l'on dénombre :

- n possibilités à l'étape 1
- p possibilités à l'étape 2 **pour chaque possibilité** de l'étape 1

Alors il y a en tout $n \times p$ possibilités

SF 1 : Dénombrement par étapes successives

2 Multiplier ou additionner les résultats ?

Si l'on dénombre :

- n possibilités à l'étape 1
- p possibilités à l'étape 2 **pour chaque possibilité** de l'étape 1

Alors il y a en tout $n \times p$ possibilités

Principe des bergers

La réunion disjointe de n ensembles tous de cardinal p est un ensemble de cardinal np

SF 1 : Dénombrement par étapes successives

Exemple 2

Combien y-a-t-il d'entiers pairs formés de trois chiffres (*i.e.* dans l'ensemble $[\![100\,,999]\!]$) ?

2 Multiplier ou additionner les résultats ?

Principe des bergers

La réunion disjointe de n ensembles tous de cardinal p est un ensemble de cardinal np

Si l'on dénombre :

- n possibilités à l'étape 1
- p possibilités à l'étape 2 **pour chaque possibilité** de l'étape 1

Alors il y a en tout $n \times p$ possibilités

SF 1 : Dénombrement par étapes successives

Exemple 3

On forme des mots de n lettres avec un alphabet de p lettres. Combien peut-on former de mots ne contenant jamais deux lettres consécutives identiques ?

2 Multiplier ou additionner les résultats ?

Théorème 3 : Produit cartésien

- Si E et F sont finis : $\quad \mathrm{Card}(E \times F) =$

2 Multiplier ou additionner les résultats ?

Théorème 3 : Produit cartésien

- Si E et F sont finis : $\quad \mathrm{Card}(E \times F) = |E| \times |F|$

2 Multiplier ou additionner les résultats ?

Théorème 3 : Produit cartésien

- Si E et F sont finis : $\quad \mathrm{Card}(E \times F) = |E| \times |F|$
- Généralisation :

2 Multiplier ou additionner les résultats ?

Théorème 3 : Produit cartésien

- Si E et F sont finis : $\mathrm{Card}(E \times F) = |E| \times |F|$
- Généralisation : $\mathrm{Card}(E_1 \times \cdots \times E_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Card}(E_i)$

2 Multiplier ou additionner les résultats ?

Théorème 3 : Produit cartésien

- Si E et F sont finis : $\mathrm{Card}(E \times F) = |E| \times |F|$
- Généralisation : $\mathrm{Card}(E_1 \times \cdots \times E_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Card}(E_i)$

Exercice 2

Démontrer le premier point par étapes successives.

2 Multiplier ou additionner les résultats ?

Théorème 4 : Ensemble des applications de E dans F

L'ensemble $\mathscr{F}(E, F) = F^E$ est fini et :

2 Multiplier ou additionner les résultats ?

Théorème 4 : Ensemble des applications de E dans F

L'ensemble $\mathscr{F}(E,F) = F^E$ est fini et : $|\mathscr{F}(E,F)| = |F|^{|E|}$

2 Multiplier ou additionner les résultats ?

Théorème 4 : Ensemble des applications de E dans F

L'ensemble $\mathscr{F}(E,F) = F^E$ est fini et : $\quad |\mathscr{F}(E,F)| = |F|^{|E|}$

Exercice 3

Dénombrer les éléments de $\mathscr{F}(E,F)$ par étapes successives.

2 Multiplier ou additionner les résultats ?

SF 1 : Dénombrement par disjonction de cas

Si l'on dénombre

- n_1 possibilités dans le premier cas : « ou bien ceci »
- n_2 possibilités dans le premier cas : « ou bien cela »

Alors il y a en tout $n_1 + n_2$ possibilités

SF 1 : Dénombrement par disjonction de cas

Si l'on dénombre

- n_1 possibilités dans le premier cas : « ou bien ceci »
- n_2 possibilités dans le premier cas : « ou bien cela »

Alors il y a en tout $n_1 + n_2$ possibilités

SF 1 : Dénombrement par disjonction de cas

Exemple 4

On tire une par une sans remise les boules d'une urne contenant n boules rouges distinctes et n vertes distinctes. Combien de tirages donnent un changement de couleur à chaque tirage ?

II p-listes d'un ensemble fini E

1 p-listes générales

Définition 1

Une p -*liste* (ou p-uplet) de E est :

Entier naturel non-nul

Définition 1

Une p-*liste* (ou p-uplet) de E est :

1 p-listes générales

Entier naturel non-nul

Définition 1

Une *p-liste* (ou p-uplet) de E est : un élément $(x_1, \ldots, x_p)$ de E^p

1 p-listes générales

Entier naturel non-nul

Définition 1

Une p-*liste* (ou p-uplet) de E est : un élément $(x_1, \ldots, x_p)$ de E^p

Exemple 1 : Les 2-listes de $E = \{a, b, c\}$

,

1 p-listes générales

Entier naturel non-nul

Définition 1

Une p-*liste* (ou p-uplet) de E est : un élément $(x_1, \ldots, x_p)$ de E^p

Exemple 1 : Les 2-listes de $E = \{a, b, c\}$

(a, a), (a, b), (a, c),

1 p-listes générales

Entier naturel non-nul

Définition 1

Une p-liste (ou p-uplet) de E est : un élément $(x_1, \dots, x_p)$ de E^p

Exemple 1 : Les 2-listes de $E = \{a, b, c\}$

$$(a, a),\ (a, b),\ (a, c),\ (b, a),\ (b, b),\ (b, c),\ (c, a),\ (c, b),\ (c, c)$$

1 p-listes générales

Entier naturel non-nul

Définition 1

Une p-liste (ou p-uplet) de E est : un élément $(x_1, \dots, x_p)$ de E^p

Exemple 1 : Les 2-listes de $E = \{a, b, c\}$

$$(a, a),\ (a, b),\ (a, c),\ (b, a),\ (b, b),\ (b, c),\ (c, a),\ (c, b),\ (c, c)$$

Remarque

Dans une p-liste :

1 p-listes générales

Entier naturel non-nul

Définition 1

Une p-*liste* (ou p-uplet) de E est : un élément $(x_1, \ldots, x_p)$ de E^p

Exemple 1 : Les 2-listes de $E = \{a, b, c\}$

$$(a,a),\ (a,b),\ (a,c),\ (b,a),\ (b,b),\ (b,c),\ (c,a),\ (c,b),\ (c,c)$$

Remarque

Dans une p-liste :

- l'ordre des éléments compte

1 p-listes générales

Entier naturel non-nul

Définition 1

Une p-*liste* (ou p-uplet) de E est : un élément $(x_1, \ldots, x_p)$ de E^p

Exemple 1 : Les 2-listes de $E = \{a, b, c\}$

$$(a, a),\ (a, b),\ (a, c),\ (b, a),\ (b, b),\ (b, c),\ (c, a),\ (c, b),\ (c, c)$$

Remarque

Dans une p-liste :

$(a, b) \neq (b, a)$

- l'ordre des éléments compte

1 p-listes générales

Entier naturel non-nul

Définition 1

Une p-*liste* (ou p-uplet) de E est : un élément $(x_1, \ldots, x_p)$ de E^p

Exemple 1 : Les 2-listes de $E = \{a, b, c\}$

$$(a, a),\ (a, b),\ (a, c),\ (b, a),\ (b, b),\ (b, c),\ (c, a),\ (c, b),\ (c, c)$$

Remarque

Dans une p-liste :

$(a, b) \neq (b, a)$

- l'ordre des éléments compte
- un même élément peut être répété

1 p-listes générales

Entier naturel non-nul

Définition 1

Une p-liste (ou p-uplet) de E est : un élément $(x_1, \ldots, x_p)$ de E^p

Exemple 1 : Les 2-listes de $E = \{a, b, c\}$

$$(a,a),\ (a,b),\ (a,c),\ (b,a),\ (b,b),\ (b,c),\ (c,a),\ (c,b),\ (c,c)$$

Remarque

Dans une p-liste : $(a, b) \neq (b, a)$

- l'ordre des éléments compte
- un même élément peut être répété

Théorème 1

Le nombre de p-listes de E est :

1 p-listes générales

Définition 1

Entier naturel non-nul

Une p-liste (ou p-uplet) de E est : un élément $(x_1, \ldots, x_p)$ de E^p

Exemple 1 : Les 2-listes de $E = \{a, b, c\}$

$$(a, a),\ (a, b),\ (a, c),\ (b, a),\ (b, b),\ (b, c),\ (c, a),\ (c, b),\ (c, c)$$

Remarque

Dans une p-liste :

$(a, b) \neq (b, a)$

- l'ordre des éléments compte
- un même élément peut être répété

Théorème 1

Le nombre de p-listes de E est : n^p

1 p-listes générales

Entier naturel non-nul

Définition 1

Une p-*liste* (ou p-uplet) de E est : un élément $(x_1, \ldots, x_p)$ de E^p

Exemple 1 : Les 2-listes de $E = \{a, b, c\}$

$$(a, a),\ (a, b),\ (a, c),\ (b, a),\ (b, b),\ (b, c),\ (c, a),\ (c, b),\ (c, c)$$

Remarque

Dans une p-liste :

$(a, b) \neq (b, a)$

- l'ordre des éléments compte
- un même élément peut être répété

Théorème 1

Le nombre de p-listes de E est : n^p $= \mathrm{Card}(E^p)$

1 p-listes générales

Théorème 1

Le nombre de p-listes de E est : $\underbrace{n^p}_{= \mathrm{Card}(E^p)}$

SF 2 : Dénombrer des tirages successifs et avec remise

On tire *successivement et avec remise* p boules dans une urne contenant n boules. Il y a n^p tirages possibles.

1 p-listes générales

Théorème 1

$= \text{Card}(E^p)$

Le nombre de p-listes de E est : n^p

SF 2 : Dénombrer des tirages successifs et avec remise

On tire *successivement et avec remise* p boules dans une urne contenant n boules. Il y a n^p tirages possibles.

Exemple 2

1. On lance un dé quatre fois de suite. Combien de résultats peut-on obtenir ?

1 p-listes générales

Théorème 1

$= \mathrm{Card}(E^p)$

Le nombre de p-listes de E est : n^p

SF 2 : Dénombrer des tirages successifs et avec remise

On tire *successivement et avec remise* p boules dans une urne contenant n boules. Il y a n^p tirages possibles.

Exemple 2

2. Un jardinier doit installer une rangée de douze pots de plans de tomates.
   Combien de semi différents peut-il réaliser sachant qu'il peut semer entre 1 et 4 graines dans chaque pot ?

2 Arrangements

Définition 2

ou *p-arrangement*

Un *arrangement de p éléments* de E est :

2 Arrangements

Définition 2

ou *p-arrangement*

Un *arrangement de p éléments* de E est : une p-liste d'éléments de E deux à deux distincts.

Définition 2

ou *p-arrangement*

Un *arrangement de p éléments* de E est : une p-liste d'éléments de E deux à deux distincts.

Exemple 3 : Les 2-arrangements de $E = \{a, b, c\}$

2 Arrangements

Définition 2

ou *p-arrangement*

Un *arrangement de p éléments* de E est : une p-liste d'éléments de E deux à deux distincts.

Exemple 3 : Les 2-arrangements de $E = \{a, b, c\}$

$$(a, b),\ (a, c),$$

2 Arrangements

Définition 2

ou *p-arrangement*

Un *arrangement de p éléments* de E est : une p-liste d'éléments de E deux à deux distincts.

Exemple 3 : Les 2-arrangements de $E = \{a, b, c\}$

$$(a, b),\ (a, c),\ (b, a),\ (b, c),\ (c, a),\ (c, b)$$

2 Arrangements

Définition 2

ou *p-arrangement*

Un *arrangement de p éléments* de E est : une p-liste d'éléments de E deux à deux distincts.

Exemple 3 : Les 2-arrangements de $E = \{a, b, c\}$

$$(a, b),\ (a, c),\ (b, a),\ (b, c),\ (c, a),\ (c, b)$$

Théorème 2

Si $p \leq n$, le nombre de p-arrangements de E est :

2 Arrangements

Définition 2

ou *p-arrangement*

Un *arrangement de p éléments* de E est : une p-liste d'éléments de E deux à deux distincts.

Exemple 3 : Les 2-arrangements de $E = \{a, b, c\}$

$$(a, b),\ (a, c),\ (b, a),\ (b, c),\ (c, a),\ (c, b)$$

Théorème 2

Si $p \leq n$, le nombre de p-arrangements de E est :

$$n(n-1)\dots(n-p+1)$$

2 Arrangements

Définition 2

ou *p-arrangement*

Un *arrangement de p éléments* de E est : une p-liste d'éléments de E deux à deux distincts.

Exemple 3 : Les 2-arrangements de $E = \{a, b, c\}$

$$(a,b),\ (a,c),\ (b,a),\ (b,c),\ (c,a),\ (c,b)$$

Théorème 2

Si $p \leq n$, le nombre de p-arrangements de E est :

$$n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Définition 2

ou *p-arrangement*

Un *arrangement de p éléments* de E est : une p-liste d'éléments de E deux à deux distincts.

Exemple 3 : Les 2-arrangements de $E = \{a, b, c\}$

$$(a, b),\ (a, c),\ (b, a),\ (b, c),\ (c, a),\ (c, b)$$

Théorème 2

Si $p \leq n$, le nombre de p-arrangements de E est :

$$n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Aucun si $p > n$

2 Arrangements

Définition 2

ou *p-arrangement*

Un *arrangement de p éléments* de E est : une p-liste d'éléments de E deux à deux distincts.

Exemple 3 : Les 2-arrangements de $E = \{a, b, c\}$

$$(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b)$$

Théorème 2

Si $p \leq n$, le nombre de p-arrangements de E est :

$$n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Aucun si $p > n$

Exercice 1

Etablir le résultat par étapes successives.

2 Arrangements

SF 2 : Dénombrer des tirages successifs et sans remise

On tire *successivement et sans remise* p boules dans une urne contenant n boules. Il y a $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ tirages possibles

2 Arrangements

SF 2 : Dénombrer des tirages successifs et sans remise

On tire *successivement et sans remise* p boules dans une urne contenant n boules. Il y a $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ tirages possibles

Exemple 4 : Le tiercé

Un joueur assiste à une course de 15 chevaux et parie sur le premier, le second et le troisième cheval à l'arrivée.
Combien y-a-t-il de tiercés gagnants possibles ?

2 Arrangements

SF 2 : Dénombrer des tirages successifs et sans remise

On tire *successivement et sans remise* p boules dans une urne contenant n boules. Il y a $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ tirages possibles

Théorème 3 : Applications injectives

Si $\mathrm{Card}(E) = p$ et $\mathrm{Card}(F) = n$, alors il y a :

2 Arrangements

SF 2 : Dénombrer des tirages successifs et sans remise

On tire *successivement et sans remise* p boules dans une urne contenant n boules. Il y a $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ tirages possibles

Théorème 3 : Applications injectives

Si $\mathrm{Card}(E) = p$ et $\mathrm{Card}(F) = n$, alors il y a : $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ injections de E dans F

2 Arrangements

SF 2 : Dénombrer des tirages successifs et sans remise

On tire *successivement et sans remise* p boules dans une urne contenant n boules. Il y a $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ tirages possibles

Théorème 3 : Applications injectives

Si $\mathrm{Card}(E) = p$ et $\mathrm{Card}(F) = n$, alors il y a : $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ injections de E dans F si $p \leq n$

2 Arrangements

SF 2 : Dénombrer des tirages successifs et sans remise

On tire *successivement et sans remise* p boules dans une urne contenant n boules. Il y a $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ tirages possibles

Théorème 3 : Applications injectives

Si $\mathrm{Card}(E) = p$ et $\mathrm{Card}(F) = n$, alors il y a : $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ injections de E dans F si $p \leq n$ (et aucune si $p < n$)

2 Arrangements

SF 2 : Dénombrer des tirages successifs et sans remise

On tire *successivement et sans remise* p boules dans une urne contenant n boules. Il y a $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ tirages possibles

Théorème 3 : Applications injectives

Si $\text{Card}(E) = p$ et $\text{Card}(F) = n$, alors il y a : $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ injections de E dans F si $p \leq n$ (et aucune si $p < n$)

Exercice 2

En procédant par étapes successives prouver le résultat précédent lorsque $p \leq n$.

3 Permutations

Rappel

Une permutation de E est une bijection de E sur E.

3 Permutations

Rappel

Une permutation de E est une bijection de E sur E.

Théorème 4 : Permutations

Le nombre de permutations de E est :

3 Permutations

Rappel

Une permutation de E est une bijection de E sur E.

Théorème 4 : Permutations

Le nombre de permutations de E est : $n!$

3 Permutations

Rappel

Une permutation de E est une bijection de E sur E.

Théorème 4 : Permutations

Le nombre de permutations de E est : $n!$

Interprétation

Une permutation correspond à une façon de :

3 Permutations

Rappel

Une permutation de E est une bijection de E sur E.

Théorème 4 : Permutations

Le nombre de permutations de E est : $n!$

Interprétation

Une permutation correspond à une façon de : ranger n éléments distincts.

3 Permutations

Rappel

Une permutation de E est une bijection de E sur E.

Théorème 4 : Permutations

Le nombre de permutations de E est : $n!$

Interprétation

Une permutation correspond à une façon de : ranger n éléments distincts.

Retenir :
Il y a $n!$ façons d'ordonner les n éléments d'un ensemble

3 Permutations

Rappel

Une permutation de E est une bijection de E sur E.

Théorème 4 : Permutations

Le nombre de permutations de E est : $n!$

Interprétation

Une permutation correspond à une façon de : ranger n éléments distincts.

Retenir :

Il y a $n!$ façons d'ordonner les n éléments d'un ensemble

Exemple 5

Combien de façons de disposer 8 livres côte à côte sur une étagère ?

Rappel

Une permutation de E est une bijection de E sur E.

Théorème 4 : Permutations

Le nombre de permutations de E est : $n!$

Interprétation

Une permutation correspond à une façon de : ranger n éléments distincts.

Retenir :
Il y a $n!$ façons d'ordonner les n éléments d'un ensemble

Exemple 6

Combien d'anagrammes peut-on former à partir du mot CHEVAL ?

Rappel

Une permutation de E est une bijection de E sur E.

Théorème 4 : Permutations

Le nombre de permutations de E est : $n!$

Interprétation

Une permutation correspond à une façon de : ranger n éléments distincts.

Retenir :
Il y a $n!$ façons d'ordonner les n éléments d'un ensemble

Exemple 7

Combien de permutations de $[\![1\,,n]\!]$ envoient 1 sur 2 et 2 sur n ?

III Parties d'un ensemble

1 Combinaisons

Définition 1 Entier relatif

Une combinaison de p éléments de E est :

1 Combinaisons

Définition 1 Entier relatif

Une combinaison de p éléments de E est : une partie de E de cardinal p

1 Combinaisons

Définition 1 Entier relatif

Une combinaison de p éléments de E est : une partie de E de cardinal p *i.e.* de la forme $\{x_1, \ldots, x_p\}$

1 Combinaisons

Définition 1 Entier relatif

Une combinaison de p éléments de E est : une partie de E de cardinal p *i.e.* de la forme $\{x_1, \ldots, x_p\}$

Exemple 1 : Combinaisons de deux éléments de $E = \{a, b, c\}$

1 Combinaisons

Définition 1 Entier relatif

Une combinaison de p éléments de E est : une partie de E de cardinal p *i.e.* de la forme $\{x_1, \dots, x_p\}$

Exemple 1 : Combinaisons de deux éléments de $E = \{a, b, c\}$

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$$

Définition 1 Entier relatif

Une combinaison de p éléments de E est : une partie de E de cardinal p *i.e.* de la forme $\{x_1, \ldots, x_p\}$

Exemple 1 : Combinaisons de deux éléments de $E = \{a, b, c\}$

$$\{a, b\},\ \{a, c\},\ \{b, c\}$$

Remarque

- Dans une combinaison :

1 Combinaisons

Définition 1 Entier relatif

Une combinaison de p éléments de E est : une partie de E de cardinal p *i.e.* de la forme $\{x_1, \dots, x_p\}$

Exemple 1 : Combinaisons de deux éléments de $E = \{a, b, c\}$

$$\{a, b\}, \ \{a, c\}, \ \{b, c\}$$

Remarque

- Dans une combinaison : les éléments sont donnés sans ordre .

1 Combinaisons

Définition 1 Entier relatif

Une combinaison de p éléments de E est : une partie de E de cardinal p *i.e.* de la forme $\{x_1, \dots, x_p\}$

Exemple 1 : Combinaisons de deux éléments de $E = \{a, b, c\}$

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$$

$\{a, b\} = \{b, a\}$

Remarque

- Dans une combinaison : les éléments sont donnés sans ordre.

1 Combinaisons

Définition 1

Entier relatif

Une combinaison de p éléments de E est : une partie de E de cardinal p *i.e.* de la forme $\{x_1, \ldots, x_p\}$

Exemple 1 : Combinaisons de deux éléments de $E = \{a, b, c\}$

$$\{a, b\},\ \{a, c\},\ \{b, c\}$$

Remarque

$\{a, b\} = \{b, a\}$

- Dans une combinaison : les éléments sont donnés sans ordre.
- Dans une combinaison de p éléments, les p éléments en question sont :

1 Combinaisons

Définition 1

Entier relatif

Une combinaison de p éléments de E est : une partie de E de cardinal p *i.e.* de la forme $\{x_1, \ldots, x_p\}$

Exemple 1 : Combinaisons de deux éléments de $E = \{a, b, c\}$

$$\{a, b\},\ \{a, c\},\ \{b, c\}$$

$\{a, b\} = \{b, a\}$

Remarque

- Dans une combinaison : les éléments sont donnés sans ordre .
- Dans une combinaison de p éléments, les p éléments en question sont : tous distincts.

Théorème 1

Le nombre de combinaisons de p éléments de E est :

1 Combinaisons

Définition 1 Entier relatif

Une combinaison de p éléments de E est : une partie de E de cardinal p *i.e.* de la forme $\{x_1, \ldots, x_p\}$

Exemple 1 : Combinaisons de deux éléments de $E = \{a, b, c\}$

$$\{a, b\},\ \{a, c\},\ \{b, c\}$$

$\{a, b\} = \{b, a\}$

Remarque

- Dans une combinaison : les éléments sont donnés sans ordre .
- Dans une combinaison de p éléments, les p éléments en question sont : tous distincts.

Théorème 1

Le nombre de combinaisons de p éléments de E est : $\dbinom{n}{p}$

1 Combinaisons

Théorème 1

Le nombre de combinaisons de p éléments de E est : $\binom{n}{p}$ où

$$\binom{n}{p} \underset{\text{déf.}}{=} \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ si } 0 \leq p \leq n$$

1 Combinaisons

Théorème 1

Le nombre de combinaisons de p éléments de E est : $\binom{n}{p}$ où

$$\binom{n}{p} \underset{\text{déf.}}{=} \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ si } 0 \leq p \leq n$$

$\binom{n}{p} = 0 \quad$ sinon

1 Combinaisons

Théorème 1

Le nombre de combinaisons de p éléments de E est : $\displaystyle\binom{n}{p}$ où

$$\binom{n}{p} \underset{\text{déf.}}{=} \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ si } 0 \leq p \leq n$$

$\binom{n}{p} = 0 \quad$ sinon

Exercice 1

Démontrer cette formule pour $p \leq n$ en dénombrant autrement le nombre de p-arrangements de E

1 Combinaisons

Théorème 1

Le nombre de combinaisons de p éléments de E est : $\dbinom{n}{p}$ où

$$\binom{n}{p} \underset{\text{déf.}}{=} \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ si } 0 \leq p \leq n$$

$\binom{n}{p} = 0$ sinon

SF 4 : Dénombrer des tirages simultanés

On tire *simultanément* p boules dans une urne contenant n boules. Le nombre de tirages possibles est : $\binom{n}{p}$.

1 Combinaisons

Théorème 1

Le nombre de combinaisons de p éléments de E est : $\binom{n}{p}$ où

$$\binom{n}{p} \underset{\text{déf.}}{=} \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ si } 0 \leq p \leq n$$

$\binom{n}{p} = 0 \quad$ sinon

SF 4 : Dénombrer des tirages simultanés

On tire *simultanément* p boules dans une urne contenant n boules.
Le nombre de tirages possibles est : $\binom{n}{p}$.

Exemple 2 : Dans un jeu de 32 cartes

De combien de façons peut-on tirer 3 cartes simultanément ?

1 Combinaisons

Théorème 1

Le nombre de combinaisons de p éléments de E est : $\displaystyle\binom{n}{p}$ où

$$\binom{n}{p} \underset{\text{déf.}}{=} \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ si } 0 \leq p \leq n$$

$\binom{n}{p} = 0 \quad$ sinon

SF 4 : Dénombrer des tirages simultanés

On tire *simultanément* p boules dans une urne contenant n boules. Le nombre de tirages possibles est : $\binom{n}{p}$.

Exemple 3 : Combien d'anagrammes peut-on former

à partir du mot *NARVAL*, du mot *ANAGRAMME* ?

1 Combinaisons

Théorème 1

Le nombre de combinaisons de p éléments de E est : $\binom{n}{p}$ où

$$\binom{n}{p} \underset{\text{déf.}}{=} \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ si } 0 \leq p \leq n$$

$\binom{n}{p} = 0 \quad$ sinon

SF 4 : Dénombrer des tirages simultanés

On tire *simultanément* p boules dans une urne contenant n boules.
Le nombre de tirages possibles est : $\binom{n}{p}$.

Exemple 4 : Combien peut-on former de codes de carte bleue

1. à l'aide de deux chiffres distincts ?

Théorème 1

Le nombre de combinaisons de p éléments de E est : $\binom{n}{p}$ où

$$\binom{n}{p} \underset{\text{déf.}}{=} \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ si } 0 \leq p \leq n$$

$\binom{n}{p} = 0$ sinon

SF 4 : Dénombrer des tirages simultanés

On tire *simultanément* p boules dans une urne contenant n boules. Le nombre de tirages possibles est : $\binom{n}{p}$.

Exemple 4 : Combien peut-on former de codes de carte bleue

2. à l'aide d'une suite de quatre chiffres strictement croissante ?

1 Combinaisons

Retenir

Il y a $\binom{n}{p}$ listes $(x_1, \ldots, x_p) \in [\![1\,,n]\!]^p$ telles que $x_1 < \cdots < x_p$

1 Combinaisons

$\binom{n}{p}$ parties $\{x_1, \ldots, x_p\}$ de $[\![1\,,n]\!]$ à p éléments

Retenir

Il y a $\dbinom{n}{p}$ listes $(x_1, \ldots, x_p) \in [\![1\,,n]\!]^p$ telles que $x_1 < \cdots < x_p$

1 Combinaisons

$\binom{n}{p}$ parties $\{x_1, \ldots, x_p\}$ de $[\![1\,,n]\!]$ à p éléments
1 façon de ranger $\{x_1, \ldots, x_p\}$ par ordre croissant

Retenir

Il y a $\displaystyle\binom{n}{p}$ listes $(x_1, \ldots, x_p) \in [\![1\,,n]\!]^p$ telles que $x_1 < \cdots < x_p$

1 Combinaisons

$\binom{n}{p}$ parties $\{x_1, \ldots, x_p\}$ de $[\![1\,,n]\!]$ à p éléments
1 façon de ranger $\{x_1, \ldots, x_p\}$ par ordre croissant

Retenir

Il y a $\dbinom{n}{p}$ listes $(x_1, \ldots, x_p) \in [\![1\,,n]\!]^p$ telles que $x_1 < \cdots < x_p$

Exemple 5

On considère p boules identiques que l'on désire ranger dans n boîtes numérotées de 1 à n (chaque boîte peut recevoir un nombre quelconque de boules).

Montrer qu'il y a $\dbinom{n+p-1}{p}$ rangements possibles.

2 Formulaire à savoir sur les coefficients binomiaux

Théorème 2

$$\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}} \quad \boxed{\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}} \quad \boxed{\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}}$$

Théorème 3 : Valeurs remarquables à connaître

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$

2 Formulaire à savoir sur les coefficients binomiaux

Symétrie

Théorème 2

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \qquad \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1} \qquad \binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$$

Théorème 3 : Valeurs remarquables à connaître

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$

2 Formulaire à savoir sur les coefficients binomiaux

Théorème 2

Symétrie

Pascal

$$\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}} \quad \boxed{\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}} \quad \boxed{\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}}$$

Théorème 3 : Valeurs remarquables à connaître

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$

2 Formulaire à savoir sur les coefficients binomiaux

Théorème 2

Symétrie: $\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}}$

Pascal: $\boxed{\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}}$

« sans nom »: $\boxed{\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}}$

Théorème 3 : Valeurs remarquables à connaître

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$

2 Formulaire à savoir sur les coefficients binomiaux

Symétrie

Pascal

« sans nom »

Théorème 2

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \qquad \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1} \qquad \binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$$

Théorème 3 : Valeurs remarquables à connaître

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$

Exercice 2

Etablir la formule de Pascal pour $n \geq 1$ et $p \in [\![0\,,n]\!]$ en comptant de deux façons le nombre de parties à $p+1$ éléments d'un ensemble $E = \{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ de cardinal $n+1$.

2 Formulaire à savoir sur les coefficients binomiaux

Symétrie

Pascal

« sans nom »

Théorème 2

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \qquad \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1} \qquad \binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$$

Théorème 3 : Valeurs remarquables à connaître

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$

Exercice 3

Soit $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ de cardinal $n \geq 1$ et $p \in [\![1\,, n]\!]$.

1. Montrer la formule « sans nom » en comptant le nombre de façon de former une équipe de p éléments de E dont un élément capitaine.

2 Formulaire à savoir sur les coefficients binomiaux

Théorème 2

Symétrie

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Pascal

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

« sans nom »

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$$

Théorème 3 : Valeurs remarquables à connaître

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$

Exercice 3

Soit $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$ de cardinal $n \geq 1$ et $p \in [\![1\,, n]\!]$.

2. Montrer que pour tout $k \leq p$: $$\binom{n}{p}\binom{p}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$$

2 Formulaire à savoir sur les coefficients binomiaux

Théorème 2

Symétrie
$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Pascal
$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

« sans nom »
$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$$

Théorème 3 : Valeurs remarquables à connaître

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$

Exercice 3

Soit $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ de cardinal $n \geq 1$ et $p \in [\![1\,,n]\!]$.

2. Montrer que pour tout $k \leq p$: $$\binom{n}{p}\binom{p}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$$

« formule des titulaires »

3 Dénombrement de $\mathscr{P}(E)$

Théorème 4

L'ensemble $\mathscr{P}(E)$ est fini et :

3 Dénombrement de $\mathscr{P}(E)$

Théorème 4

L'ensemble $\mathscr{P}(E)$ est fini et : $\quad |\mathscr{P}(E)| = 2^{|E|}$

3 Dénombrement de $\mathscr{P}(E)$

Théorème 4

L'ensemble $\mathscr{P}(E)$ est fini et : $\quad |\mathscr{P}(E)| = 2^{|E|} \quad (= 2^n)$

3 Dénombrement de $\mathscr{P}(E)$

Théorème 4

L'ensemble $\mathscr{P}(E)$ est fini et : $\quad |\mathscr{P}(E)| = 2^{|E|} \quad (= 2^n)$

Exercice 4

Démontrer le résultat précédant.

SF 5 : Exploiter un recouvrement disjoint

Exercice 5

1. Déterminer le nombre a de couples (A, B) de parties de E tels que $A \cap B = \varnothing$

Nombre de parties de E : 2^n

Nombre de parties de E à k éléments : $\binom{n}{k}$

SF 5 : Exploiter un recouvrement disjoint

Exercice 5

1. Déterminer le nombre a de couples (A, B) de parties de E tels que $A \cap B = \varnothing$

Nombre de parties de E : 2^n

Nombre de parties de E à k éléments : $\binom{n}{k}$

SF 5 : Exploiter un recouvrement disjoint

Exercice 5

1. Déterminer le nombre a de couples (A, B) de parties de E tels que $A \cap B = \varnothing$
2. Plus généralement, pour $p \in [\![0, n]\!]$, déterminer le nombre de couples (A, B) de parties de E tels que $|A \cap B| = p$

3 Dénombrement de $\mathscr{P}(E)$

Nombre de parties de E : 2^n

Nombre de parties de E à k éléments : $\binom{n}{k}$

SF 5 : Exploiter un recouvrement disjoint

Exercice 5

1. Déterminer le nombre a de couples (A, B) de parties de E tels que $A \cap B = \varnothing$

défi !

2. Plus généralement, pour $p \in [\![0\,,n]\!]$, déterminer le nombre de couples (A, B) de parties de E tels que $|A \cap B| = p$

3 Dénombrement de $\mathscr{P}(E)$

Nombre de parties de E : 2^n

Nombre de parties de E à k éléments : $\binom{n}{k}$

SF 5 : Exploiter un recouvrement disjoint

Exercice 5

1. Déterminer le nombre a de couples (A, B) de parties de E tels que $A \cap B = \varnothing$
2. Plus généralement, pour $p \in [\![0\,,n]\!]$, déterminer le nombre de couples (A, B) de parties de E tels que $|A \cap B| = p$

défi !

3. Déterminer le nombre b de couples (A, B) de parties de E tels que $A \subset B$.

IV Indicatrices

1 Indicatrice d'une partie

Partie de E

Définition 1

L'*indicatrice de* A est l'application $\mathbb{1}_A : E \to \{0,1\}$ définie pour tout $x \in E$ par : $\mathbb{1}_A(x) =$

1 Indicatrice d'une partie

Partie de E

Définition 1

L'*indicatrice de* A est l'application $\mathbb{1}_A : E \to \{0,1\}$ définie pour tout $x \in E$ par : $\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1 Indicatrice d'une partie

Partie de E

Définition 1

L'*indicatrice de* A est l'application $\mathbb{1}_A : E \to \{0,1\}$ définie pour tout $x \in E$ par : $\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Théorème 1 : Propriétés des indicatrices

- *Inclusion :* $A \subset B \Leftrightarrow$
- *Egalité :* $A = B \Leftrightarrow$

1 Indicatrice d'une partie

Partie de E

Définition 1

L'*indicatrice de* A est l'application $\mathbb{1}_A : E \to \{0,1\}$ définie pour tout $x \in E$ par : $\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Théorème 1 : Propriétés des indicatrices

- *Inclusion* : $A \subset B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$
- *Egalité* : $A = B \Leftrightarrow$

1 Indicatrice d'une partie

Partie de E

Définition 1

L'*indicatrice de* A est l'application $\mathbb{1}_A : E \to \{0,1\}$ définie pour tout $x \in E$ par : $\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Théorème 1 : Propriétés des indicatrices

- *Inclusion* : $A \subset B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$
- *Egalité* : $A = B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$

1 Indicatrice d'une partie

Partie de E

Définition 1

L'*indicatrice de* A est l'application $\mathbb{1}_A : E \to \{0,1\}$ définie pour tout $x \in E$ par : $\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Théorème 1 : Propriétés des indicatrices

- *Inclusion :* $A \subset B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$
- *Egalité :* $A = B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$
- *Complémentaire :* $\mathbb{1}_{\overline{A}} =$

1 Indicatrice d'une partie

Partie de E

Définition 1

L'*indicatrice de* A est l'application $\mathbb{1}_A : E \to \{0,1\}$ définie pour tout $x \in E$ par : $\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Théorème 1 : Propriétés des indicatrices

- *Inclusion* : $A \subset B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$
- *Egalité* : $A = B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$
- *Complémentaire* : $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$

Partie de E

Définition 1

L'*indicatrice de* A est l'application $\mathbb{1}_A : E \to \{0,1\}$ définie pour tout $x \in E$ par : $\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Théorème 1 : Propriétés des indicatrices

- *Inclusion :* $A \subset B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$
- *Egalité :* $A = B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$
- *Complémentaire :* $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$
- *Intersection :* $\mathbb{1}_{A \cap B} =$

1 Indicatrice d'une partie

Partie de E

Définition 1

L'*indicatrice de* A est l'application $\mathbb{1}_A : E \to \{0,1\}$ définie pour tout $x \in E$ par : $\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Théorème 1 : Propriétés des indicatrices

- *Inclusion* : $A \subset B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$
- *Egalité* : $A = B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$
- *Complémentaire* : $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$
- *Intersection* : $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$

1 Indicatrice d'une partie

Partie de E

Définition 1

L'*indicatrice de* A est l'application $\mathbb{1}_A : E \to \{0,1\}$ définie pour tout $x \in E$ par : $\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Théorème 1 : Propriétés des indicatrices

- *Inclusion :* $A \subset B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$
- *Egalité :* $A = B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$
- *Complémentaire :* $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$
- *Intersection :* $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$
- *Réunion :* $\mathbb{1}_{A \cup B} =$

1 Indicatrice d'une partie

Partie de E

Définition 1

L'*indicatrice de* A est l'application $\mathbb{1}_A : E \to \{0,1\}$ définie pour tout $x \in E$ par : $\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Théorème 1 : Propriétés des indicatrices

- *Inclusion :* $A \subset B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$
- *Egalité :* $A = B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$
- *Complémentaire :* $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$
- *Intersection :* $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$
- *Réunion :* $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$

1 Indicatrice d'une partie

Partie de E

Définition 1

L'*indicatrice de* A est l'application $\mathbb{1}_A : E \to \{0,1\}$ définie pour tout $x \in E$ par : $\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Théorème 1 : Propriétés des indicatrices

- *Inclusion* : $A \subset B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$
- *Egalité* : $A = B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$
- *Complémentaire* : $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$
- *Intersection* : $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$
- *Réunion* : $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$

Exercice 1

Démontrer les propriétés relatives à l'inclusion et à l'intersection.

1 Indicatrice d'une partie

Exercice 2

1. Montrer que $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{F}\big(E, \{0,1\}\big) \\ A & \longmapsto & \mathbb{1}_A \end{array}$ est bijective.

1 Indicatrice d'une partie

Exercice 2

1. Montrer que $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{F}\big(E, \{0,1\}\big) \\ A & \longmapsto & \mathbb{1}_A \end{array}$ est bijective.
2. En déduire une nouvelle preuve de : $\quad |\mathscr{P}(E)| = 2^{|E|}$.

Théorème 2 : Lien avec le cardinal

Pour toute partie A de E : $|A| =$

2 Lien avec le cardinal

Théorème 2 : Lien avec le cardinal

Pour toute partie A de E : $$|A| = \sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x)$$

Théorème 2 : Lien avec le cardinal

Pour toute partie A de E : $$|A| = \sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x)$$

Exercice 3

Démontrer le théorème.

SF 6 : Utiliser les indicatrices pour calculer des cardinaux

Exercice 4

On cherche à calculer : $S = \sum_{A \in \mathscr{P}(E)} |A|.$

1. Calculer S en sommant par paquet selon le recouvrement disjoint $\left(\mathscr{P}_k(E)\right)_{0 \leq k \leq n}$ de $\mathscr{P}(E)$.
2. Calculer S en exprimant $|A|$ à l'aide d'indicatrices.

Recouvrement disjoint d'un ensemble E

= familles de parties de E telles que

- $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i = E$
- $A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$

SF 6 : Utiliser les indicatrices pour calculer des cardinaux

Exercice 4

On cherche à calculer : $\displaystyle S = \sum_{A \in \mathscr{P}(E)} |A|.$

1. Calculer S en sommant par paquet selon le recouvrement disjoint $\left(\mathscr{P}_k(E)\right)_{0 \leq k \leq n}$ de $\mathscr{P}(E)$.
2. Calculer S en exprimant $|A|$ à l'aide d'indicatrices.

Exercice 5

Soient $A_1, \ldots, A_n$ des parties de E.

1. Vérifier que :

$$\prod_{i=1}^{n}(1 - \mathbb{1}_{A_i}) = 1 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}}$$

2. En déduire :

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$$