Objectif :

- Lever des formes indéterminées
- Travailler les techniques classiques sur les suites. Revoir la méthode d'étude d'une suite du type « $u_{n+1} = f(u_n)$ » en utilisant le caractère lipschitzien de f.

Les exercices

Etude de limites

1 4 points – Etudier la limite de f au point considéré

a) $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n}$ en 0^+ $\quad (m, n \in \mathbb{N}^*)$

b) $f : x \mapsto (x^3 + x^2)^{\frac{1}{3}} - (x^3 - x^2)^{\frac{1}{3}}$ en $+\infty$

c) $f : x \mapsto \dfrac{\sin(3\pi x)}{\sin(4\pi x)}$ en 1

d) $f : x \mapsto (\frac{\pi}{2} - x)\tan x$ en $\frac{\pi}{2}$.

Suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ lorsque f est k-lipshitzienne

2 12 points – Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ un point fixe de f. Soit d'autre part $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On suppose ici que $|f'(a)| < 1$.

- **a)** Justifier l'existence de $\alpha > 0$ et de $k \in [0, 1[$ tels que f est k-lipschitzienne sur $[a-\alpha, a+\alpha]$.
- **b)** On suppose que $u_0 \in [a-\alpha, a+\alpha]$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a.

2. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a sans être stationnaire. Déterminer la limite de $\dfrac{u_{n+1}-a}{u_n - a}$.

3. On suppose ici que $|f'(a)| > 1$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger vers a que si elle est stationnaire.
Indication : Raisonner par l'absurde et utiliser le 2.