Objectif :

- Lever des formes indéterminées
- Travailler les techniques classiques sur les suites. Revoir la méthode d'étude d'une suite du type « $u_{n+1} = f(u_n)$ » en utilisant le caractère lipschitzien de f.

Les exercices

Etude de limites

1 4 points – Etudier la limite de f au point considéré

a) $f : x \mapsto \dfrac{x - \lfloor x \rfloor}{\sqrt{|x|}}$, en 0

b) $f : x \mapsto \dfrac{\ln(e^{\sin x} + x^2)}{\ln(1+x)}$ en $+\infty$

c) $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$ en 0.

d) $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$ en 0.

Suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ lorsque f est k-lipshitzienne

2 12 points – On note f la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{\operatorname{sh} x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

1. Résoudre l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^*$. On notera α l'unique solution strictement positive de l'équation.
2. Montrer que pour tout $x \geq 0$: $\quad 0 \leq x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \leq \dfrac{1}{2} \operatorname{sh}^2 x$.
3. Montrer que $\mathbb{R}_+^*$ est stable par f et que f est $\dfrac{1}{2}$-lipschizienne sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Soit $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$.
   Montrer que (u_n) est bien définie et converge vers α.